第１章　序論

曇天時の大気地表面系や森林・都市キャノピーにおける放射エネルギーの空間的・角度的分布を詳細に計算するには三次元の放射輸送過程を扱うことのできるモデルが必要である。このような放射モデルは，雲解像モデルを用いたシミュレーションにおいて放射加熱率の三次元分布を現実的に再現するのに特に重要である。またリモートセンシングデータを用いて広い領域の大気や陸面の観測をする場合には，雲や植生，陸面などのパラメータを衛星観測で得られる分光放射輝度に結びつける必要がある。従来この種の計算では簡略化した扱いがなされてきたが，アルゴリズムの改良と計算能力の進歩によってより詳細かつ現実的な扱いが可能になりつつある。

地球物理学における放射伝達に関して今日比較的難しいとされる問題は，例えば曇天大気や植生・都市キャノピーの三次元放射伝達，葉群や非球形粒子の散乱，偏光，球状地球表面上の放射伝達，レーザービームの散乱問題などである。これらの多くは MC 法を用いてモデル化することができる。特に三次元の放射伝達の問題は，地球物理学に限らず，宇宙物理や，医療計測，機械工学の分野でもモンテカルロ法の利用が盛んであり，アルゴリズムも共通する部分が多い（e.g., 谷口他，1994）。

モンテカルロ法は数値積分の一つの手法として幅広い分野で利用されている。その利点は解析的な手法が困難な複雑な問題について，比較的容易に対応できることである。一般に簡単な問題では解析的手法の方が効率良く計算できるが，問題が複雑化（e.g., より高次元）するほどモンテカルロ法の方が有利になる。解析的手法では問題が複雑になるとより大きな計算資源（計算時間とメモリ）を要するのに比べ，モンテカルロ法では必要な計算機資源が問題の複雑さにはあまり強く依存しないためである。

放射伝達に関しても一次元の問題は解析的な手法が 1980 年代までにほぼ確立したが，三次元の放射伝達の正確な計算はモンテカルロ法以外の方法では非常に困難であった。モンテカルロ法を用いた放射伝達モデルは歴史が長く，決して計算機資源が今日のように豊富ではなかった時代にも三次元の比較的簡単な大気や植生の問題に用いられていた (McKee and Cox, 1974; Aida, 1977; Oikawa and Saeki, 1977; Davies, 1984)。計算機の進歩とともにモンテカルロ放射伝達モデルはより複雑な大気の問題を扱うことができるようになった (Barker and Davies, 1992; Cahalan et al., 1994a; Barker et al., 1998; O'Hirok and Gautier, 1998; Macke et al., 1999; Fu et al., 2000; Barker et al., 2003; Iwabuchi and Tsuboki, 2004)。植生キャノピーのモンテカルロ放射伝達モデルの分野では，1970 年代までは植

物生態学者(Oikawa and Saeki, 1977 など)を中心にモデル化の試みがなされたが, その後, 地球・惑星物理学及び情報工学分野の研究者によってモデル化研究が進んだ(Ross and Marshak, 1988; Antyufeev and Marshak, 1990; North, 1996; Govaerts and Verstraete, 1998)。その結果, 今日のモデルでは大気のモンテカルロ放射伝達モデルと類似した理論体系でモデル化されている。

1990年代からMC法以外の半解析的な三次元放射伝達のモデルもいくつか開発され, 今日までの間に成熟してきた感がある (Gastellu-Etchegorry et al, 1996; Evans, 1998; Marshak and Davis, 2005)。しかしそれでもより複雑な問題の扱いや必要な計算機資源の面でモンテカルロ法の方が適していることが多い。近似的な扱いをせず, 物理過程を非常に正確に再現できることも MC モデルの利点である。

著者らはこれまで MC 法を用いた三次元放射伝達モデルの開発に携わり, 大気や植生キャノピーの放射エネルギーの収支計算や, 光学観測に基づく遠隔測定のためのシミュレーションなど様々な目的に利用できるモデルを開発した。本稿はその放射モデルについて, その基礎となる理論を簡単に解説し, 具体的な計算アルゴリズムについて詳細に記述したものである。多岐にわたるアルゴリズムをできるだけ網羅し, 実際にコーディングができることを目指して書かれた。そのため, 放射理論についての教科書的な解説は省略されている。基礎的な解説は他の文献を参照されたい。

以下, 第２章では MC モデルの基礎理論と基本的なアルゴリズムについて解説した。まず第２章で MC モデルの原理を述べ, 大気と植生キャノピーの放射特性について概略を述べる。第３章では, MC モデルで用いられる個々のアルゴリズムについて具体的に解説した。放射伝達の素過程である放射源からの射出, 大気や植生キャノピー中の散乱と吸収, 地表面･海面における反射, 放射量の計算方法などについて詳細に述べている。第４章では計算効率の改善のための理論的方法と数値的技法について述べる。場合によっては, ここで述べる高速化手法を用いることで桁違いに高速な計算が可能になり得る。第５章では大気と植生キャノピーの具体的なモデルについて紹介し, いくつかの計算例を示す。第６章に結論を述べる。

第２章　放射モデルの基礎

2.1 モンテカルロ放射モデルの理論

ここでは，モンテカルロ法による光子の輸送計算の理論をまとめ，アルゴリズムの基本概念及び簡単なモンテカルロ放射伝達シミュレーションコードを紹介する。

2.1.1 モンテカルロ法による放射伝達計算

定常状態における三次元放射伝達方程式の微分形は，任意の微少領域における放射量の収支式として以下のように記述できる。

$$\Omega \cdot \nabla I(\mathbf{r},\Omega) = -\beta_e(\mathbf{r}) I(\mathbf{r},\Omega) + \frac{\beta_s(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r},\Omega') P(\mathbf{r},\Omega',\Omega) d\Omega' + B_T \quad (2.1.1)$$

ここで，右辺第一項は対象経路での放射の散逸量であり，右辺第二項は他の方向から対象経路に入射した散乱光の寄与分，最後の項 B_T は黒体放射の寄与分である。β_e, β_s はそれぞれ，単位体積当たりの消散係数 (m^{-1}) と散乱係数 (m^{-1}) であり，P は**Ω**方向の放射量が**Ω**’方向に散乱される割合（位相関数）である。

放射伝達方程式は，衝突密度を $f(x)$ とすると以下のように積分形でも記述できる (Marchuk et al., 1980)。

$$f(x) = \int_X k(x',x) f(x') dx' + \psi(x) \quad (2.1.2)$$

ここで $x = (\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ である。また $k(x', x)$ は輸送カーネルと呼ばれるパラメータであり，x' における衝突（衝突カーネル）とその後の x' から x への状態遷移（遷移カーネル）の積事象として以下のように表せる。

$$k(x',x) = \frac{\beta_s(\mathbf{r}') P(\mu) \exp[-\tau(\mathbf{r}',\mathbf{r})] \beta_e(\mathbf{r})}{2\pi \beta_e(\mathbf{r}') |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \delta\left(\Omega - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \quad (2.1.3)$$

ここで, μは放射の進行方向(($\mathbf{r}-\mathbf{r'}$)/| $\mathbf{r}-\mathbf{r'}$|)と散乱方向$\mathbf{\Omega}$のなす角の余弦である。また, (2.1.2)の右辺に $f(x)$を逐次的に代入することにより以下のノイマン級数形式を得ることができる。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_X k_n(x',x)f(x')dx' \tag{2.1.4}$$

(2.1.4)から理解出来るように，着目領域での衝突密度はその領域における 0~∞までの散乱放射の寄与分を積算したものである。

モンテカルロ法による放射伝達計算は，乱数を用いた物理量のモンテカルロ積分計算の一つであり， (2.1.1)や(2.1.4)に従うような素過程（放射源からの射出，衝突，散乱，吸収）をモンテカルロ法で再現し，放射量をサンプリングするものである。実際のモンテカルロ放射伝達シミュレーションでは, 上記の式を解くというよりも計算対象とする領域内でモンテカルロ放射伝達アルゴリズムにおける“モデル光子”の軌跡をトレースするというものであり, この過程で上記の放射伝達式に従う物理量を計算するものである。なお，ここでいう一個の“モデル光子”とは，モンテカルロ計算を行う際のサンプリング単位として定義される量であり, いわゆる光の量子単位としての一個の光子とは一致しない。モデル光子は多数の物理的光子の集団に対応する。

モンテカルロ法における放射伝達計算は，フォワード型モンテカルロ法とバックワード型モンテカルロ法とに大別できる。フォワード型は光の進行方向に沿って“モデル光子”のレイトレーシングを行う方法であり，バックワード型モンテカルロ法は放射量を計算したい局所的な点から放射源まで光の経路を逆にトレースする方法である。バックワード型は着目領域の物理量を比較的短時間で精度良く計算することが可能である。一方フォワード法では, 一回のシミュレーションで物理量の空間分布を計算することが可能である。以降，主にフォワード・モンテカルロ法の理論について記述する。ただし，いくつかの理論やアルゴリズムはバックワード型モンテカルロ法にも共通するものである。

2.1.2 モンテカルロ放射伝達アルゴリズムの基本

モンテカルロ法では，図 2.1.1 の模式図のように対象領域の中でモデル光子を飛行させながら，モデル光子の位置・方向・重みを物理法則に従って再現し，必要な放射物理量（放射照度，放射輝度，加熱率など）の空間分布をサンプリングするものである。図 2.1.2 にアルゴリズムの基本的なフローを示した。計算は以下の手順で行われる。

i) 与えられた放射源からモデル光子を射出させ, 計算対象の領域の中でモデル光子

のレイトレースを開始する。放射源としては，太陽放射の他に熱赤外領域では大気，地表面からの輻射も含まれる。また，対象領域中にレーザー等の人工光源が存在する場合には，これも放射源となりうる

ii) 乱数を用いて放射源から射出されたモデル光子の飛行距離を計算し，モデル光子を飛行距離分だけ直進させる。

iii) モデル光子を飛行距離分だけ直進させた結果，計算対象領域の外に射出された場合には，計算を止め i)に戻り，新たなモデル光子のレイトレースをスタートする。モデル光子が対象領域中に存在する場合には，乱数を用いてモデル光子の散乱方向を決定し，ii)に戻って計算を続行する。

ここで, モデル光子の光学的な飛行距離は, 一様乱数ρを用いて以下の式で計算できる。

$$\tau = -\ln \rho \tag{2.1.5}$$

モデル光子の飛行距離については 3.4 節にて詳しく述べる。モデル光子が物体に衝突すると，散乱もしくは吸収される。この散乱と吸収の割合は，散乱媒体の光学的性質によって決定される。モンテカルロ放射伝達モデルでは，散乱・吸収には様々な取り扱いが可能であるが, いずれの場合においても散乱方向は位相関数 P に従うような統計的分布を再現するように決定する必要がある。散乱方向の決定法については 3.5 節で詳しく述べる。

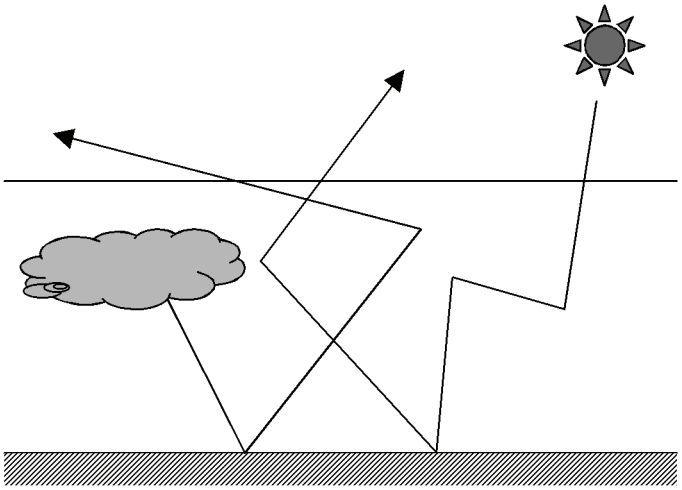


図 2.1.1 モンテカルロ法による光子のレイトレース

放射照度・放射輝度・加熱率などの放射物理量を計算するには，モデル光子の軌跡を追跡しながら必要な放射物理量をサンプリングする必要がある。一般的にモンテカルロ放射伝達モデルでは，物理量を例えば以下のように計算する。

$$F = \sum_i \Psi_i \Xi(\mathbf{r}_i) \quad \Xi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} \in \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{r} \notin \mathbf{A} \end{cases} \tag{2.1.6}$$

ここで，**A** は物理量をサンプリングする着目領域であり，$\Psi(\mathbf{r})$ は寄与関数である。実際のモンテカルロ放射伝達法では(2.1.6)を基礎とした様々な手法で物理量を評価する。

例えば，対象領域中のある面における放射照度を計算したければ，レイトレースを行っているモデル光子がその面を通過する度に，そのモデル光子の”重み”をカウントすることで計算出来る。また，放射輝度を計算する場合には 3.9 節で述べる局所推定法 (Local Estimation Method, LEM) によって，散乱イベントが起こるたびにその散乱からの寄与をサンプリングすることで計算出来る。また, 加熱率であれば散乱イベントの度に, その位置における散乱イベント前後のモデル光子の重みの変化量をサンプリングすることで得られる。これらの物理量のサンプリング法に関しては, 後の章で詳しく述べる。

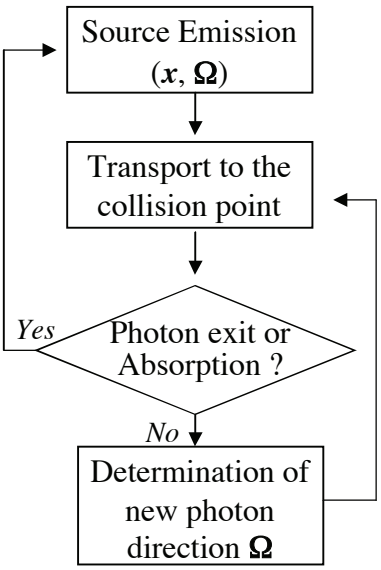


図 2.1.2 モンテカルロ放射伝達シミュレーションのフローチャート

2.1.3　簡単なモンテカルロ放射伝達モデルの例

ここでは，図 2.1.2 のフローチャートに従う簡単なモンテカルロ放射伝達コードと，それを用いた計算結果を紹介する。まず図 2.1.3 に示すように z 方向の鉛直一次元大気を考える。この大気の上端から下向きにモデル光子を入射させて，モデル光子の z 軸方向におけるレイトレースを行う。大気の上端から入射したモデル光子は，(2.1.5)に従って計算される飛行距離を移動し，散乱イベントを発生させる。図 2.1.4 は大気の上端及び下端の反射率・透過率の計算結果の一例である。この計算例では大気では吸収がないものとし，前方・後方散乱の割合が各 50%と仮定して計算している。大気の光学的厚さが大きくなるにつれて，大気上端の反射率が大きくなり，また大気下層からの透過率が小さくなっている。大気の反射率や透過率の特性は，大気の光学的厚さの他に散乱角の分布関数や吸収率にも大きく依存する。参考として本計算に用いたソースコードを添付した。このわずか 40 行足らずのソースコードで，大気の光学的性質（大気の単一散乱アルベドや地表面の反射率など）と反射・透過フラックスの関係を概念的に理解することができる。

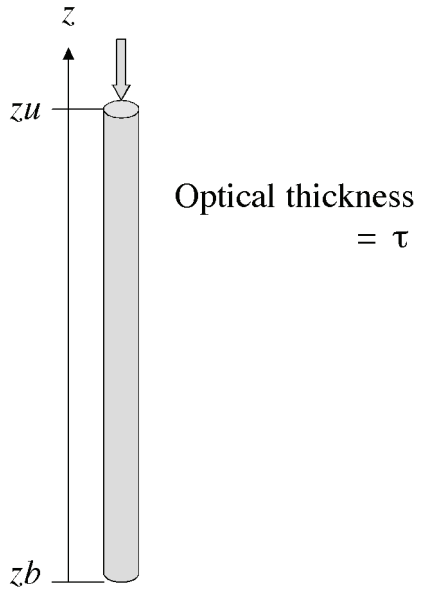


図 2.1.3 鉛直一次元大気における放射伝達

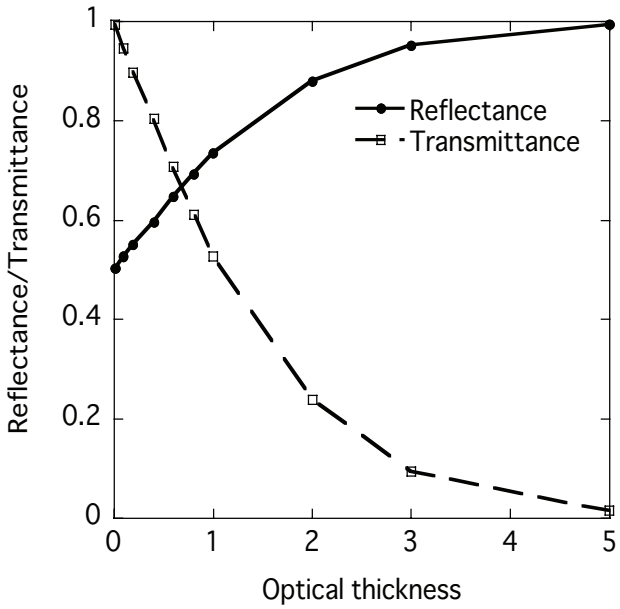


図 2.1.4 モンテカルロ計算による反射率・透過率と光学的厚さの関係

参考　本シミュレーション用に作成した Fortran 77 コード

```
c Simple one dimensional monte carlo simulation
      implicit none
      integer i,np
      real rand,zu,zb,z,tau,sr,path,w,dir,omg,sumr,sumt

      np=10000                  ! total photon
      tau=1.0                   ! optical thickness
      sr=0.5                    ! surface  reflectance
      omg=1.0                   ! single scattering albedo
      zu=tau                    ! Upper boudary
      zb=0.0                    ! Lower boudary
      sumr=0.0                  ! summation of reflectance
      sumt=0.0                  ! summation of transmittance

      do i=1,np                 ! photon loop
         w=1.0                  ! initial photon weight
         z=zu                   ! photon set in the upper boudary
         dir=-1.0               ! photon direction (+1 upward -1 downward)
         do                     ! single photon interaction loop
            path=-log(rand(0))  ! photon free path
            z=zu+dir*path       ! determination of next position z
            if(z.le.zb)then     ! if next position of z is lower than lower boudary
               z=zb             ! z is set to the lower boudary
               dir=1.0          ! upward photon direction
               sumt=sumt+w      ! transmittance sampling
               w=w*sr           ! new photon weight
            elseif(z.gt.zu)then ! if z is larger than upper boudary
               sumr=sumr+w      ! reflectance sampling
               exit             ! exit do loop
            else                ! else case scattering occures
               if(rand(0).gt.0.5)then ! random number [0,1) is larger than 0.5
                  dir=1.0*dir   ! photon direction unchange (forward scattering)
                else            ! random number [0,1) is less than 0.5
                  dir=-1.0*dir  ! photon direction change (back scattering)
               end if
               w=w*omg          ! new photon weight
            end if
         end do
      end do

      write(*,*) "Reflectance top & Transmittance bottom"
      write(*,*) sumr/np,sumt/np
      stop
      end
```

2.2 大気の放射特性

大気・地表面系のモデルについて述べる。特にレーリー散乱とミー散乱の光学特性の計算について詳細に記述した。

2.2.1 座標系と大気・地表面モデル

モンテカルロ法では様々な座標系で放射伝達をモデル化することができる。代表的な座標の取り方は,

1) デカルト座標系：(x, y, z) 軸に沿って三次元のメッシュに区切る
2) 球面座標系：球状の惑星表面上の放射伝達を扱う場合に採用される
3) 地形に沿った座標系：(x, y) 方向は長方形格子に区切り，鉛直方向の切り方は(x, y)の格子によって変化する。大気の最下層は地形に沿うように決める。

である。

大気の光学特性は各格子内では一定とし，複数の構成物の混合媒質として扱う。構成物としては,

1) 吸収気体: H_2O, CO_2, O_3, CH_4, O_2, other uniformly mixed gases
2) 散乱気体（レーリー散乱）：O_2, N_2, CO_2
3) エーロゾル：water soluble species, dust, soot, organic carbon, etc
4) 雲粒子：雲水，雲氷

などが考えられる。格子毎の各構成物について，消散係数，一次散乱アルベド，位相関数などの光学特性が与えられる。さらにエーロゾルや雲粒子は粒径分布を持っており，粒径をビンに切って考えた場合, その各ビンを混合媒体の一つの構成物として扱うこともできる。ただしそのような扱いをするには大きなメモリを要する。また，一般に放射伝達を計算する場合，重要なのは有効半径（後述）であり，粒径分布の細かい形まで考慮する必要はない場合が多い。

地表面の特性としては，各 (x, y) の位置によって，高度，表面の法線ベクトルおよび反射モデルが与えられる。反射モデルとしてはランバート反射の他，双方向反射率分布関数 BRDF に基づいたモデルがある。様々な反射モデルとその扱いについては 3.6 節で述べる。

2.2.2 気体吸収

気体吸収のスペクトルは，気体の種類とエネルギー準位の遷移によって決まる鋭いスパイク状の吸収線形を持っている。ある波長帯の吸収係数の分布はその鋭い線吸収の非常に多数の集合であり，波長によって激しく振動する。吸収線のデータは HITRAN などのデータベースに登録されており，広く一般に利用可能になっている。現実大気では吸収線の広がりが温度と気圧に依存するため, 吸収係数は温度と気圧の関数として計算される。

特定の波長帯についての放射計算をする場合, 本来は非常に狭い波長幅の line-by-line で計算しなければならないが，通常はなんらかのバンドモデルあるいは相関 k 分布 (correlated k-distribution, CKD) 法で計算する (柴田，1999)。そのようなモデルは気候・気象モデル用やリモートセンシング用共に多数ある。後者の目的で開発されたのが MODTRAN（古くは LOWTRAN：Kneizys, et al., 1988）である。気候・気象モデル用では，少ないバンド数で高精度の波長積分を達成するために多大な努力が払われている (Fu and Liou, 1992; Chou and Lee, 1996; Kato et al., 1999; Nakajima et al., 2000)。

CKD 法を用いた放射計算では，一つの波長帯について複数の項の放射計算をしてその重み付け平均をとる。K 個の項の吸収係数$\beta_a(\mathbf{r}, k)$ と，重み $w(k)$ が与えられているとする。

$$\sum_{k=1}^{K} w(k) = 1 \tag{2.2.1}$$

が成り立つ。k 番目の項について計算された放射量が $F(k)$ であるとすると，この波長帯について積分された放射量は,

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^{K} w(k) F(k) \tag{2.2.2}$$

と与えられる。モンテカルロ法で扱う場合は各項の重みに応じてモデル光子を配分する方法と，各項に任意のモデル光子数を配分（例えば等分）して (2.2.2) に従って計算する方法が考えられる。

2.2.3 レーリー散乱

a. 散乱断面積

大気分子によるレーリー散乱の散乱断面積は，以下のように与えられる（Thomas and Stamnes, 1999）。

$$\sigma = \frac{24\pi^3\left(n_s^2-1\right)^2}{\lambda^4 N_s^2\left(n_s^2+2\right)^2}F(\mathrm{air}) \tag{2.2.3}$$

ここでλは波長 (cm) であり，σは大局的にはλ^{-4}に比例している。N_sは標準大気 (288.15 K, 1013.25 hPa) の分子数密度 (molecules cm^{-3}) であり，アボガドロ数 A = 6.0221367x10^{23} (#/mol) と molar volume から

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{6.0221367\times10^{23}}{22.4141\times1000}\times\frac{273.15}{288.15} \\ &= 2.546899\times10^{19} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

と求められる。また，n_sは標準大気の屈折率（3.7 節を参照），F は偏光解消度項または King factor と呼ばれるもので，

$$F(\mathrm{air}) = \frac{6+3\rho}{6-7\rho} \tag{2.2.5}$$

である。ρは偏光解消度因子 (depolarization factor) であり，分子の非等方性を表す。King factor は最も不確定性の高い因子であり，

Penndorf (1957): $F(\mathrm{air}) = 1.0608$ (2.2.6a)

Young (1981): $F(\mathrm{air}) = 1.048$ (2.2.6b)

である。近年は Young (1981) の式が広く用いられてきた。しかし，F は本来波長λの関数であり，Bodhaine et al. (1999)によれば，Bates (1984) の分子毎の偏光解消度を大気の成分比で重み付け平均したものが最も正確である。Bates (1984) によれば，

$$F(\mathrm{N_2}) = 1.034 + 3.17\times10^{-4}\frac{1}{\lambda^4} \tag{2.2.7a}$$

$$F(\mathrm{O_2}) = 1.096 + 1.385\times10^{-3}\frac{1}{\lambda^2} + 1.448\times10^{-4}\frac{1}{\lambda^4} \tag{2.2.7b}$$

$$F(\mathrm{Ar}) = 1.0 \tag{2.2.7c}$$
$$F(\mathrm{CO_2}) = 1.15 \tag{2.2.7d}$$

である。Bodhaine et al. (1999) は上記の式を用いて，以下の式を使用することを薦めている。

$$F(\mathrm{air},\ \mathrm{CO_2}) = \frac{78.084F(\mathrm{N_2}) + 20.946F(\mathrm{O_2}) + 0.934 \times 1.0 + C_{\mathrm{CO_2}} \times 1.15}{78.084 + 20.946 + 0.934 + C_{\mathrm{CO_2}}} \tag{2.2.8}$$

ここで C_{CO2} は CO_2 濃度 (parts per volume, e.g., 360x10^{-6} for 360 ppm) である。

結局 (2.2.8) で King factor を計算し，それと (2.2.4) を (2.2.3) に代入して散乱断面積を求める。大気の屈折率については 3.7 節で述べる式を用いる。これが今日最も正確と考えられる方法であり，CO_2 の変化も考慮することができる。

より簡単な計算法としては，例えば Bodhaine et al. (1999) の 360 ppm CO_2 の場合の経験式,

$$\sigma = \frac{1.0455996 - 341.29061\lambda^{-2} - 0.90230850\lambda^{2}}{1 + 0.0027059889\lambda^{-2} - 85.968563\lambda^{2}} \tag{2.2.9}$$

を使うことができる。250–850 nm の波長範囲では上式の誤差は 0.01%以下，850–1000 nm では 0.05%以下であり，以前に提案された同様の経験式よりもはるかに高精度である。

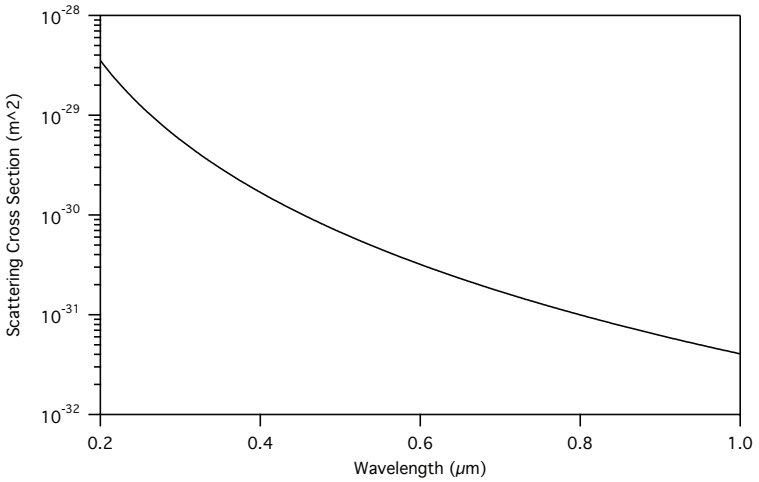


図 2.2.1　レーリー散乱の散乱断面積

b. 散乱係数と光学的厚さ

静水圧平衡 (hydrostatic equilibrium) の仮定の下では，散乱係数がわかれば大気上端から鉛直に積算した光学的厚さは簡単に計算できる。それは気圧のみの関数となる。

$$\tau(\lambda) = \sigma \frac{PA}{M_{\mathrm{dry}} g} \tag{2.2.10}$$

ここで P は気圧，M_{dry} は平均分子量，g は重力加速度である。Bodhaine et al. (1999) によれば，CO_2 濃度 C_{CO2} (parts per volume, e.g., 360x10^{-6} for 360 ppm) を考慮すると，

M_{dry} (0 ppm CO_2) = 28.95949 [gm/mol]
M_{dry} (360 ppm CO_2) = 28.96491 [gm/mol]
$M_{dry} \cong 28.9595 + 15.0556(\mathrm{CO}_2)$

である。

重力加速度は緯度ϕと海面からの高度 z (m) の関数であり，Bodhaine et al. (1999) では List (1968) に従い，g (cm s^{-1}) を以下のように計算している。

$$\begin{aligned} g = g_0 &- (3.085462 \times 10^{-4} + 2.27 \times 10^{-7} \cos 2\phi) z \\ &+ (7.254 \times 10^{-11} + 1.0 \times 10^{-13} \cos 2\phi) z^2 \\ &- (1.517 \times 10^{-17} + 6.0 \times 10^{-20} \cos 2\phi) z^3 \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

g_0 は高度 0 m の重力加速度

$$g = 980.616(1 - 0.0026373 \cos 2\phi) + 0.0000059 \cos^2 2\phi \tag{2.2.12}$$

である。Bodhaine et al. (1999) によれば，(2.2.9) の計算に用いる effective は g を与える高度を z_c (m) とすると，

$$z_c = 0.73737 z + 5517.56 \tag{2.2.13}$$

を使うのが便利である。光学的厚さが (2.2.10) により求められるので，散乱係数は

$$\beta_s(\lambda, z) = \frac{d\tau(\lambda)}{dz} = -\sigma \frac{A}{M_{\mathrm{dry}} g} \frac{dP}{dz} \tag{2.2.14}$$

により計算できる。

静水圧平衡を仮定しない場合（より一般的には），気圧と温度の鉛直分布が既知であるとする。散乱係数は分子数密度 N の関数であり，

$$\beta_s(\lambda, z) = \sigma N \tag{2.2.15}$$

と与えられる。N は，気体常数 (universal gas constant)を $R^* = 8.3143\ \mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}}$ として，

$$N = \frac{A}{R^*} \cdot \frac{P}{T} \tag{2.2.16}$$

である。高度 z_b と z_t における分子数密度がそれぞれ N_b, N_t とする。この間で分子数密度が指数関数的に変化すると仮定すると，

$$N(z) = N_b \exp\left[-\frac{z - z_b}{z_t - z_b}(\ln N_b - \ln N_t)\right] \tag{2.2.17}$$

が成り立つ。この二つの高度の間の層の光学的厚さは，以下のように求まる。

$$\begin{aligned}\tau(z_b, z_t) &= \int_{z_b}^{z_t} \sigma N(z) dz \\ &= \sigma N_b \int_{z_b}^{z_t} \exp\left[-\frac{z - z_b}{z_t - z_b}(\ln N_b - \ln N_t)\right] dz \\ &= \sigma \frac{N_b}{N_t} \frac{N_b - N_t}{\ln N_b - \ln N_t}(z_t - z_b)\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

2.2.4 ミー散乱：エーロゾルと雲粒子

エーロゾルや雲粒は多くの場合に球形と見なすことができ，そのサイズは 0.005-100 μm の範囲である。この場合の散乱はミー散乱であり，その光学特性は，波長λ, 粒子の半径 r, 物質の復素屈折率 **n** によって決まる。復素屈折率は室内実験や観測値から求めたものが水，氷，硫酸アンモニウム，すす，土壌粒子など様々な物質についてまとめられている (Hale and Querry, 1973; Palmer and Williams, 1974; Dowining and Williams, 1975; Shettle and Fenn, 1979; d'Almeida et al., 1991)。物質によっては屈折率は温度に弱く依存する（例えば水）。一個の粒子について消散断面積，散乱断面積，散乱位相関数などを計算する方法は球形粒子の場合は例えば Bohren and Huffman (1983) で解説されている。現在では，非球形粒子の場合も含め汎用的な計算コードも多数存在する。

エーロゾルや雲粒は通常様々な大きさの粒子が混合した状態で存在している。数密

度を N (#/m^3) とし，数密度粒径分布を $n(r)$ (#/m^3/μm) とすると，

$$n(r) = \frac{dN}{dr} \tag{2.2.19a}$$

$$N = \int_0^\infty n(r)dr \tag{2.2.19b}$$

である。この粒径分布は解析的な関数を仮定する場合もあれば（Appendix A1 参照），ビン法による計算や現場観測などから得られたものを使う場合もある。

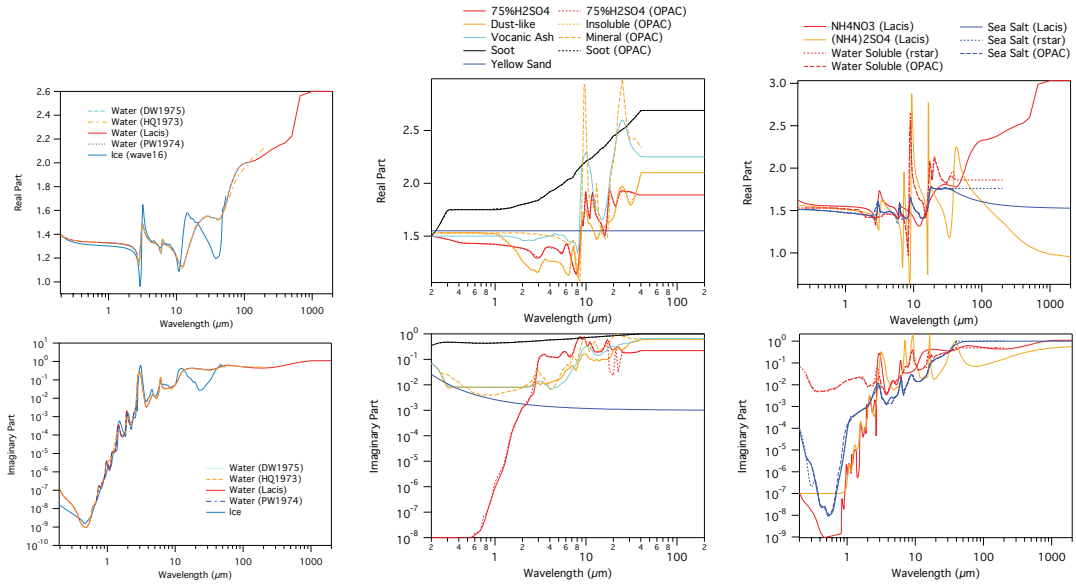


図 2.2.2 様々な物質の屈折率

2.2.5 粒径分布のモーメントと体積混合比

幾何学的平均半径，面積平均半径，体積平均半径はそれぞれ以下のように定義される。

$$r_{geo} = \frac{1}{N}\int rn(r)dr \tag{2.2.20a}$$

$$r_{sec} = \left(\frac{1}{N}\int r^2 n(r)dr\right)^{1/2} \tag{2.2.20b}$$

$$r_{vol} = \left(\frac{1}{N} \int r^3 n(r) dr \right)^{1/3} \tag{2.2.20c}$$

粒径分布を考えるときに最も重要なのは, 有効半径 r_{eff} と有効分散 v_{eff} である (Hansen and Travis, 1974)。

$$r_{eff} = \frac{\int r \cdot \pi r^2 n(r) dr}{\int \pi r^2 n(r) dr} = \frac{r_{vol}^3}{r_{sec}^2} \tag{2.2.21}$$

$$v_{eff} = \frac{\int \left(r - r_{eff} \right)^2 \cdot \pi r^2 n(r) dr}{r_{eff}^2 \int \pi r^2 n(r) dr} = \frac{1}{r_{eff} r_{vol}^3} \frac{\int r^4 n(r) dr}{N} - 1 \tag{2.2.22}$$

これらはつまり断面積で重み付けされた平均と分散である。有効半径と, 面積平均半径, 体積平均半径の関係を,

$$\kappa = \left(\frac{r_{sec}}{r_{eff}} \right)^2 = \left(\frac{r_{vol}}{r_{eff}} \right)^3 \tag{2.2.23}$$

と置くことがある。κは粒径分布の幅に関係した係数である。Martin et al. (1994) の粒径分布の現場観測によれば，海洋性の境界層雲ではおよそ $k = 0.8$, 大陸性では $k = 0.67$ である。

単位体積あたりの空気に含まれる粒子の体積 V (volume mixing ratio in m^3/m^3) および質量密度 M (mass density in kg/ m^3) は，それぞれ

$$V = \int \frac{4}{3} \pi r^3 n(r) dr = \frac{4\pi}{3} r_{\mathrm{vol}}^3 N \tag{2.2.24a}$$

$$M = \rho V \tag{2.2.24b}$$

と表される。ρは物質の密度 (kg/m^3) である。仮に V または M と N が与えられたとき, 有効半径は，(2.2.23a) と(2.2.24a,b) より

$$r_{eff} = \left[\frac{3}{4\pi\kappa N} V \right]^{1/3} = \left[\frac{3}{4\pi\kappa N} \frac{M}{\rho} \right]^{1/3}, \tag{2.2.25}$$

となる。このようにκは有効半径と V or M と N を結びつけるパラメータである。(2.2.20, 2.2.24) より単位体積あたりの空気に含まれる粒子の全幾何学的断面積 (m^2/m^3) の式が導かれる。

$$\int \pi r^2 n(r)dr = N\pi r_{sec}^2 = \frac{3}{4}\frac{V}{r_{eff}} = \frac{3}{4}\frac{M}{r_{eff}\rho} \tag{2.2.26}$$

粒径分布は解析的な関数で近似表現されることが多い。 雲やエーロゾルの場合は，Power-law 分布，ガンマ分布，対数正規分布などで表現されることが多い（Hess et al. 1998）。Appendix A1 では代表的な分布関数について述べ，その特性量と M, V, N との関係などについてまとめている。

2.2.6 粒径分布で重み付け平均した光学特性

粒径分布を考慮して平均された消散係数 (m^{-1}), 散乱係数 (m^{-1}), 散乱位相関数は，それぞれ

$$\beta_e = \int \tilde{Q}_e(r)\pi r^2 n(r)dr \tag{2.2.27a}$$

$$\beta_s = \int \tilde{Q}_s(r)\pi r^2 n(r)dr \tag{2.2.27b}$$

$$P(\Theta) = \frac{\int \tilde{P}(\Theta, r)\tilde{Q}_s(r)\pi r^2 n(r)dr}{\int \tilde{Q}_s(r)\pi r^2 n(r)dr} \tag{2.2.27c}$$

である。特定の半径に対応する消散・散乱効率因子（単位断面積あたりの消散断面積）や位相関数は，ミー散乱の理論によって計算できる。ここで，断面積で重み付け平均した消散・散乱効率因子を

$$Q_e = \frac{\int \tilde{Q}_e(r)\pi r^2 n(r)dr}{\int \pi r^2 n(r)dr},\ Q_s = \frac{\int \tilde{Q}_s(r)\pi r^2 n(r)dr}{\int \pi r^2 n(r)dr} \tag{2.2.28}$$

と置くと，(2.2.23b) を使うと，（粒子一個あたりの）平均消散断面積と散乱断面積，および一次散乱アルベドは，

$$\sigma_e = Q_e \pi r_{sec}^2 = Q_e \pi \frac{r_{vol}^3}{r_{eff}} \tag{2.2.29a}$$

$$\sigma_s = Q_s \pi r_{sec}^2 = Q_s \pi \frac{r_{vol}^3}{r_{eff}} \tag{2.2.29b}$$

$$\omega = \frac{\sigma_s}{\sigma_e} = \frac{Q_s}{Q_e} \tag{2.2.29c}$$

となる。

以上をまとめると，ある一つの散乱粒子媒体について粒径分布 $n(r)$ が与えられたとき，光学特性の計算に必要なパラメータは，

$$\left(Q_e, Q_s, P(\Theta)\right) \text{ and } \left(N, r_{sec}\right)$$

である。ただし (2.2.23–24) を使うと M や V を使った別な形式に書くこともできる。

ここまで述べたように粒径分布を考慮して平均した光学特性は多くの場合，粒径分布と幾何学的断面積で重み付けして積分する計算が必要である（例えば (2.2.27–28)）。つまり

$$Y = \int_0^{\infty} \tilde{Y}(r)\pi r^2 n(r)dr \cong \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \tilde{Y}(r)\pi r^2 n(r)dr \tag{2.2.30}$$

という求積を行うことになる。この積分計算について考えよう。$Y(r)$ は r に対し強く依存せずその変動は不規則なものである（散乱効率因子など）。$n(r)$ は多くの場合，正に大きく歪んだ分布である。よって

$$\frac{dN}{d\ln r} = r\frac{dN}{dr} = rn(r) \tag{2.2.31}$$

$$Y = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Y}(r)\pi r^3 n(r)d\ln r \cong \int_{\ln r_{\min}}^{\ln r_{\max}} \tilde{Y}(r)\pi r^3 n(r)d\ln r \tag{2.2.32}$$

という変形が便利である。ここで強調すべきは求積の範囲を決めるときに $n(r)$ を参照して決めるのは良くないということである。積分範囲の最小・最大値 $r_{\min}$, $r_{\max}$ は $r^3 n(r)$ が十分に小さくなるように決めるのが良い。

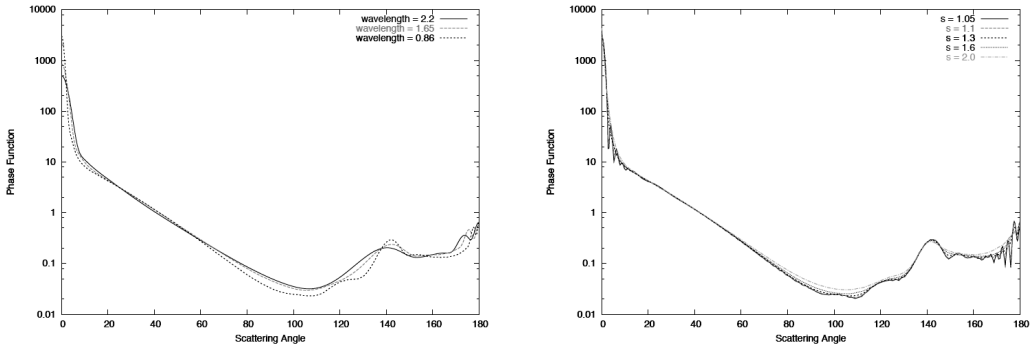


図 2.2.3　体積対数正規分布を仮定した場合の雲水の位相関数（左）。有効半径 10 μm で体積対数正規分布の幅 s を変えた場合の位相関数（右）。

一般には，複数のエーロゾルまたは雲水，雲氷が混合している媒体を考えなければならない。混合媒体の光学特性の計算については Appendix A2 で述べている。また，放射伝達シミュレーションではある波長区間について平均した光学特性を用いて計算をすることが多い。そのための波長平均した光学特性の求め方について Appendix A3 で述べている。さらにエーロゾルの鉛直分布の与え方について Appendix A4 で一例を挙げて述べている。

2.2.7 エーロゾルの吸湿成長

エーロゾルには親水性のもの（e.g., $(NH_4)_2SO_4$, NH_4NO_3, NaCl）と非親水性のもの (e.g., soil, desert dust, black carbon) がある。親水性のものは大気中の水蒸気を吸湿してサイズが増大しかつ密度と屈折率が水の場合に近づく。相対湿度の増大と共に吸湿成長するときはある相対湿度 RHD までは一切吸湿せず，RHD に達したとき一気に吸湿し，相対湿度によって決まる曲線に従って成長する。逆に相対湿度の減少とともに蒸発するときにはある相対湿度 RHC に達したとき一気に結晶化する。一般に RHC < RHD である。相対湿度との関係や RHD, RHC などのパラメータは物質によって異なる。このようなヒステリシスを持っているため，サイズの増加率や溶質の混合比は相対湿度だけでは決まらず，その粒子がどのような経過をたどってきたかに依存する（これでは散乱の計算をするときに困ってしまう）。現実に大気中に存在する粒子は多くの場合相対湿度の大きな時を経験してきており，ヒステリシス曲線の上端上にあると考えられる (Hess et al., 1998)。

粒子の質量を m とすると，半径の増加率（成長因子 growth factor）B と溶質の質量混合比を以下の式で定義する。

$$B = \frac{r}{r_0} \tag{2.2.33a}$$

$$x = \frac{m_0}{m} \tag{2.2.33b}$$

下付きの 0 は乾燥状態の溶質を意味する。成長因子 B と密度ρとの関係は

$$B^3 = \frac{m}{m_0}\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho x} \tag{2.2.34}$$

となる。B は最大で 4 程度である（相対湿度 0.99）。平衡状態の相対湿度η (between 0 and 1) は，厳密には表面張力によるケルビン効果によって少し増大する。しかし（大きい粒子では特に）この効果は非常に小さいので，無視すると，相対湿度は水活動度（water

activity) に等しい。

$$\eta \cong a_w \tag{2.2.35}$$

Tang and Munkelwitz (1994, 1996) は様々な物質について，以下の経験式を求めた。

$$a_w = 1.0 + \sum_i C_i x^i \tag{2.2.36a}$$

$$\rho = 0.9971 + \sum_i A_i x^i \tag{2.2.36b}$$

これを使えば，相対湿度$\eta = a_w$が RHC 以上の場合，まず (2.2.36a) により溶質の混合比 x を（数値的に）求め，それを (2.2.36b) に代入して密度ρを求めることができる。これらを (2.2.34) に代入すれば成長因子 B を求めることができる。同じ物質であればηのみによって B が決まり，どのサイズの粒子もみな同じ比率 B で大きくなる（$r = r_0 B$）。吸湿成長したエーロゾルの粒径分布は，

$$n(r) = \frac{dN}{dr} = \frac{dN}{Bdr_0} = \frac{1}{B} n_0(r_0),\ r_0 = \frac{r}{B} \tag{2.2.37a}$$

$$\therefore \frac{dN}{d\ln r} = \frac{dN}{d\ln r_0}, \tag{2.2.37b}$$

となる。例えば乾燥状態の数密度粒径分布が対数正規分布（Appendix A1 参照）であれば，溶解した場合の粒径分布も対数正規分布で，そのモード半径は B 倍になり，標準偏差σは変わらない。

次に屈折率について考える。水と溶質の分子量をそれぞれ M_w, M_s とすると溶質のモル比f_s は質量混合比 x と以下の関係がある。

$$f_s = \frac{xM_w}{(1-x)M_s + xM_w} \tag{2.2.38}$$

水と溶質の「モル屈折」を R_w, R_s とすると，屈折率の実部 n_r は，

$$\frac{n_r^2 - 1}{n_r^2 + 2} = \rho \frac{(1-f_s)R_w + f_s R_s}{(1-f_s)M_w + f_s M_s} \tag{2.2.39}$$

より求まる。モル屈折は，以下のように屈折率から計算できる。

$$R_w = \frac{M_w}{\rho_w}\frac{n_w^2-1}{n_w^2+2},\ R_s = \frac{M_s}{\rho_s}\frac{n_s^2-1}{n_s^2+2} \tag{2.2.40}$$

Tang and Munkelwitz (1994, 1996) では波長 0.633 μm の屈折率（実部）を正確に求めている。これを使って，屈折率を内挿するための比,

$$\alpha = \frac{n_r - n_w}{n_s - n_w} \tag{2.2.41}$$

を 0.633 μm について求める。この波長では $n_w = 1.333$ である。これを全ての波長の実部と虚部の計算に応用すると，屈折率は,

$$\mathbf{n} = (1-\alpha)\mathbf{n}_w + \alpha\mathbf{n}_s \tag{2.2.42}$$

によって線形内挿される。ここで $\mathbf{n}_s$, $\mathbf{n}_w$ はそれぞれ溶質と水の復素屈折率である。屈折率を内挿するとき，質量で重み付け平均したり ($\alpha = x$)，あるいは体積で重み付け ($\alpha = 1/B^3$) したりする方法も考えられるが，(2.2.39) に従う方がよりリーズナブルである。表 2.2.1 に主要な物質のパラメータをまとめる。

吸湿したエーロゾルのミー散乱の特性は半径だけでなく屈折率にも依存するので，半径と屈折率内挿因子αについて計算して参照表 LUT にしておく。任意の粒径分布と相対湿度が与えられれば，相対湿度から x, ρ, αを計算し，LUT から内挿した散乱特性を粒径分布で重み付け平均すれば吸湿したエーロゾルの散乱特性が得られる。乾燥半径と相対湿度について LUT を作るという方法も考えられるが，その場合は相対湿度と溶解したときの半径の関係を後から変更することが難しくなる。

表 2.2.1 吸湿性のある種々の物質のパラメータ

	$(NH_4)_2SO_4$	NH_4NO_3	NaCl	H_2SO_4
RHD	0.8	0.62	0.753	N.A.
RHC	0.4–0.37	0.25–0.32	0.48–0.46	N.A.
C_1	–2.715E–1	–3.65E–1	–6.366E–1	–5.196E–1
C_2	3.113E–1	–9.155E–2	8.624E–1	9.746E–1
C_3	–2.336E0	–2.826E–1	–1.158E+1	–9.693E0
C_4	1.412E0	0	1.518E+1	9.405E0
A_1	5.92E–1	4.05E–1	7.41E–1	7.367E–1
A_2	–5.036E–2	9.0E–2	–3.741E–1	–4.934E–1
A_3	1.024E–2	0	2.252E0	1.754E0
A_4	0	0	–2.06E0	–1.104E0
Dry Density, ρ_0	1.76	1.725	2.165	1.834
Refractive Index, n_s	1.526	1.554	1.544	1.429
M_s	132.154	80.052	58.44	98.086

$a\mathrm{E}b = a \times 10^b$

2.3 植生キャノピーの放射特性

植生内での光の相互作用過程について述べる。また，植生パラメータの定義や森林における樹木の配置方法について述べる。

2.3.1 葉面の光学的特性

植生キャノピー内で光と相互作用を行う要素として，葉・幹・枝などがある。ここでは，比較的多くの研究事例があり，環境ストレスによってそのスペクトル形状が変化する葉の光学的性質について記述する。幹や枝の光学特性のモデル化に関する研究例はほとんどなく，多くの場合には，反射率は分光反射率の実測データを測定して入力値としている。幹や枝と葉面との大きな違いは，クロロフィル *a* 及びクロロフィル *b* の有無だけであり，その他の生物体を構成する主要な生化学物質はその量の程度の差はあるものの類似している。

a. 葉内の光の反射・透過・吸収

一枚の葉の分光反射率・分光透過率は，葉の内部に含まれる生化学物質の量や葉の構造によって決定される。図 2.3.1 は 400–2500 nm の波長域における葉の反射率と透過率の計算結果の一例である。すべての植物の葉の分光反射率・分光透過率は，その絶対値に多少の違いはあるものの，似たような波長依存性を持っている。

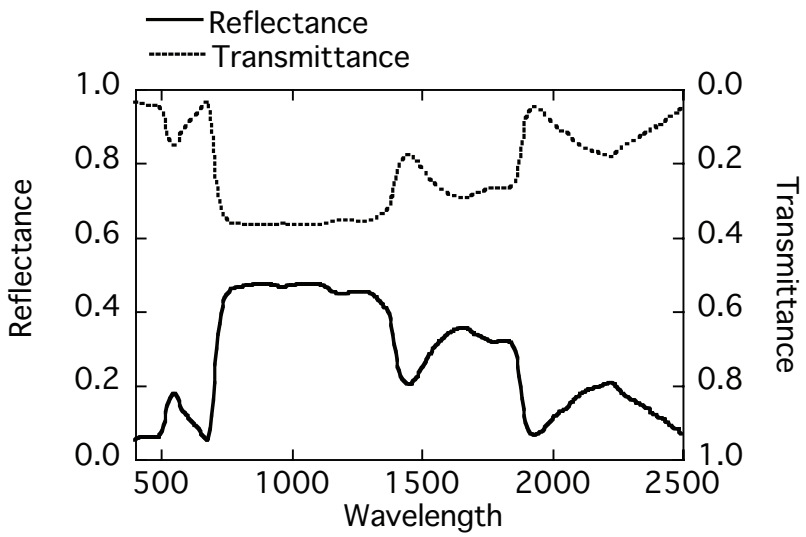


図 2.3.1 典型的な単葉の反射率・透過率。カラマツ葉の典型的な値を用いて LIBERTY モデルで計算

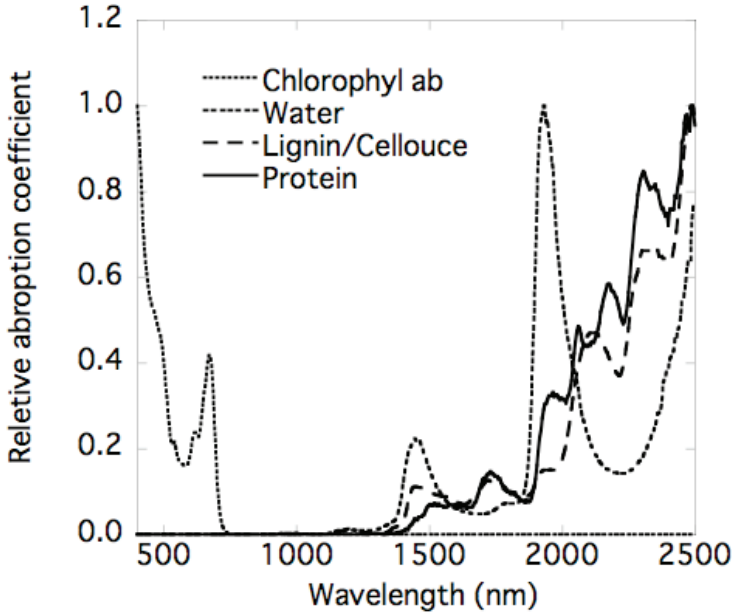


図 2.3.2 葉内の生化学物質の吸収係数

可視域では，クロロフィル *a*，クロロフィル *b*，カロチノイドによる光の吸収により反射率・透過率が小さい（吸収率が大きい）。また，クロロフィル *a* とクロロフィル *b* は 400 nm と 670 nm 付近に吸収のピークを持ち (図 2.3.2)，カロチノイドは 440–450 nm の間に吸収のピークを持つことから，反射率・透過率とも若干吸収係数の小さくなる 550 nm 付近をピークにして凸形状となる。このため葉の色は濃い緑色に見える。新緑の季節に葉が濃い緑色ではなく薄緑に見えるのは，クロロフィル量が少ないためである。また，紅葉期の葉が黄色や赤色になるのは，光合成に必要な色素が欠乏する為である。

一方，700–1400 nm の近赤外領域では葉内の生化学物質の吸収がほとんど無いため，光は葉内の細胞壁で何度も反射を繰り返した後に葉の外に射出される。この波長域の反射・透過の割合は，葉の厚みや個々の細胞の大きさなど，葉の構造的要因によって決定される。

1400–2500 nm の間には 1450 nm 付近と 1900 nm 付近に強い水の吸収帯があり，反射率・透過率が低下している。また，この波長域では波長が長くなるにつれてタンパク質やセルロース，リグニン，水の吸収が大きくなるため（図 2.3.2），反射率・透過率が徐々に低下する。

b. クロロフィル蛍光

可視域では，植物の光合成反応に伴い光を放出する過程が存在する。これをクロロフィル蛍光という。クロロフィル蛍光は，光合成を行う２つの光化学系（光化学系 I と光化学系 II）の中の光化学系 II で起こる現象である。光合成系では植物が吸収した光エネルギーを有機物のエネルギーに変換するが, 葉内のクロロフィルが吸収した光エネルギーをすべて光合成系のエネルギーとして利用するわけではない。光合成回路に伝達されなかった光エネルギーは熱として散逸されるか，再放射されることになる。この再放射過程が，クロロフィル蛍光であり，光を吸収して励起状態にあるクロロフィル内の分子が光を放出する過程である。クロロフィル蛍光は 680nm 付近にピークを持つ赤領域の光であるが，蛍光として放出される光エネルギーは吸収された光の 0.5-3%程度と言われており（彦坂, 2003），通常の植生放射伝達モデリングでは無視しても大きな影響はない。

c. キサントフィルサイクルとスペクトル変化

キサントフィルサイクルは，葉の光合成有効放射の吸収量が光合成反応の能力を超える条件下で，余分な光エネルギーを熱エネルギーとして処理する働きをする。この一連の生化学反応でキサントフィル類の高分子が化学変化し，それに伴いカロチノイドの吸収係数のピークが 443nm から 451nm へと変化する (吉村, 2001)。葉の反射率・透過率変化を観察した場合, キサントフィルサイクルに伴うスペクトル変化は極めて微少である。実験室系での測定では, キサントフィルサイクルに伴うスペクトルの変化を検知することは可能である。しかし草地・森林といった群落レベルで考える場合，光合成有効放射の吸収量は葉の傾きや陽葉･陰葉等の幾何学的条件によってそれぞれの葉で異なることから，群落レベルで観測される光環境への影響はあまり大きくないと考えられる。

d. 葉面の反射・透過のモデル化

前節までに説明したように葉の透過率や反射率は，葉に含まれる生化学物質量や葉の構造によって決定される。このような葉の反射や透過を計算するモデルは幾つか存在する。Jacquemoud and Baret (1990)は広葉樹の平面的な葉の反射率・透過率をモデル化し，PROSPECT モデルを提案した。また，Dawson et al. (1998)は針葉樹の反射率・透過率を計算するモデル（LIBERTY モデル）を構築している。PROSPECT と LIBERTY のモデルでは，葉の構造とその配置に関する仮定が異なる。PROSPECT の場合，葉を平板層が何層にも積み重なった形状としてモデル化しているのに対して，LIBERTY は葉の内

部の個々の細胞を球状と仮定し，それぞれの細胞が等間隔で並んでいる空間内での光の反射過程をしてモデル化している。どちらのモデルも扱う量は半球反射率・半球透過率である。以下に一例として PROSPECT モデルを紹介する。

PROSPECT

PROSPECT モデルは，葉面を平板層に見立て，その平板層が複数重なって葉面を形成していると仮定してモデル化されている。このモデルは Allen et al. (1969)による”Plate model”を拡張したモデルである。境界面における光の最大入射角をθ_mとすると，N 層の平板層を構成する葉の半球反射率($R_{N,\theta m}$)・半球透過率($T_{N,\theta m,}$)は以下の式で計算される。

$$R_{N,\theta_m} = xR_{N,90} + y \tag{2.3.1}$$

$$T_{N,\theta_m} = xT_{N,90} \tag{2.3.2}$$

ここで x, y はそれぞれ以下の式で与えられる。

$$x = \frac{t(\theta_m, n)}{t(90, n)} \tag{2.3.3}$$

$$y = x(t(90,n) - 1) + 1 - t(\theta_m, n) \tag{2.3.4}$$

ここで，$t(\alpha,n)$ は屈折率 n の境界面における入射角 0 からθ_mまでのすべての偏光成分の平均透過率であり，フレネルの法則と Stern の理論(Stern, 1964)により解析的に計算できる。また，$R_{N,90}$，$T_{N,90}$は以下の(2.3.5–10)で計算出来る。

$$\frac{R_{N,90}}{b_{90}^N - b_{90}^{-N}} = \frac{T_{N,90}}{a_{90}^N - a_{90}^{-N}} = \frac{1}{a_{90}b_{90}^N - a_{90}^{-1}b_{90}^{-N}} \tag{2.3.5}$$

$$a_{90} = \frac{(1 + \rho_{90}^2 - \tau_{90}^2 + \delta_{90})}{2\rho_{90}} \tag{2.3.6}$$

$$b_{90} = \frac{(1 - \rho_{90}^2 + \tau_{90}^2 + \delta_{90})}{2\tau_{90}} \tag{2.3.7}$$

$$\delta_{90} = \sqrt{(\tau_{90}^2 - \rho_{90}^2 - 1)^2 - 4\rho_{90}^2} \tag{2.3.8}$$

$$\rho_{90} = 1 - t(90,n) + \frac{t(90,n)^2 k^2 (n^2 - t(90,n))}{n^4 - k^2(n^2 - t(90,n))^2} \tag{2.3.9}$$

$$\tau_{90} = \frac{t(90,n)^2 kn^2}{n^4 - k^2(n^2 - t(90,n))^2} \tag{2.3.10}$$

ここで k は物質の吸収に関係したパラメータであり，以下の関係式で吸収係数 K に変換できる。

$$k-(1-K)e^{-K}-K^2\int_K^{\infty}x^{-1}e^{-x}dx=0 \tag{2.3.11}$$

葉の吸収係数は個々の生化学物質の単位面積当たりの含有量(C)と吸収係数(K)の重み付き平均として求まる。

$$K=\sum K_i C_i \tag{2.3.12}$$

なお，植物の葉の屈折率 n は条件によって異なるが，実測値 (Gausman et al., 1974 など) を参考にして 1.3–1.5 の間の値がよく用いられている。PROSPECT では，光の最大入射角(α)，屈折率(n)，吸収係数(K)，葉の厚さパラメータ(N)から葉の反射率・透過率を計算することができる。

2.3.2 放射伝達モデルにおける葉面の扱い

a. 葉面積指数・葉面積密度

葉面積密度 $u(\mathbf{r})$は，位置 $\mathbf{r}$ における単位体積当たりの葉の片面の総面積($m^2 / m^3 = m^{-1}$)で定義される。また，葉面積指数(l)は単位地表面積当たりの葉の片面の総面積(m^2 / m^2= 無次元)であり，葉面積密度 $u(\mathbf{r})$を地上からキャノピー上端(H)まで鉛直方向に積分することで得られる。

$$l=\int_0^H u(\mathbf{r})dz \tag{2.3.13}$$

b. 葉面の傾き分布

一般に植物は最適な光合成活動を行えるように葉を配置する。葉の傾きは植物の種類や葉の位置によって様々であるが, 分布関数を用いて葉面の傾きを統計的に捉えると非常に便利である。位置 $\mathbf{r}$ において天頂角 θ_L の法線ベクトル$\mathbf{\Omega}_L$ を持つ葉面の傾き分布関数を $g_L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}_L)$とする。$g_L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}_L)$は以下のように規格化される。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_L(\mathbf{r},\Omega_L)\sin\theta_L d\theta_L d\varphi_L=1 \tag{2.3.14}$$

なお，多くの場合には葉面は方位角には依存しないと考えられるから，その場合には

$$\int_0^1 g_L(\mathbf{r},\theta_L)d\mu_L = 1 \tag{2.3.15}$$

となる。ここで $\mu_L = \cos\theta_L$ である。葉面の傾き分布関数にはさまざまなものが提案されている。最も単純な関数はすべての葉面がランダムな傾きを持つものであり，

$$g_L(\mathbf{r},\theta_L) = 1 \tag{2.3.16}$$

である。また，葉面がある角度を中心として，その周りに楕円関数で分布するとした場合，分布関数は以下の式で定義される。

$$g_L(\mathbf{r},\theta_L) = \frac{B}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2(\theta_L-\theta_m)}} \tag{2.3.17}$$

ここで B は規格化定数である。図 2.3.3 は楕円分布の一例である。楕円分布は，葉面の傾きの分布中心(θ_m)とその広がりを示す離心率パラメータ(ε)の２パラメータのみで分布形状を決定できる。

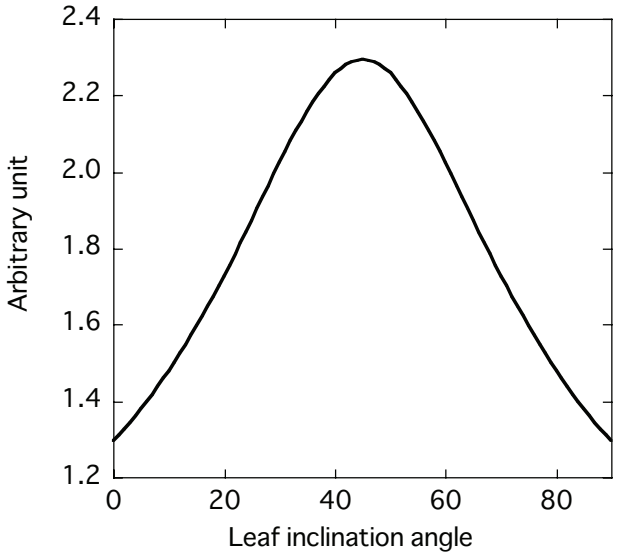


図 2.3.3 楕円関数を用いた葉面の傾き分布関数 (分布中心 45°離心率 0.9)

c. 葉の分布する植生内の消散係数

葉の分布する植生キャノピーの消散係数は，光の進行方向 $\mathbf{\Omega}$ に対する葉面の射影面積に等しい。光の進行方向に対する葉面の射影割合 G は以下の式で計算される。

$$G(\mathbf{r},\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_L(\mathbf{r},\Omega_L)\left|\Omega_L\cdot\Omega\right|\sin\theta_L d\theta_L d\varphi_L \tag{2.3.18}$$

なお葉面の傾き分布が一様ランダムな場合（2.3.16），G は 1/2 となる。

また，単位体積当たりの消散係数β_eは G と葉面積密度 u の積で表せる。

$$\beta_e(\mathbf{r},\Omega)=G(\mathbf{r},\Omega)u(\mathbf{r}) \tag{2.3.19}$$

植生のキャノピーの光学的厚さは， (2.3.19)を地上から樹冠の上端まで積分することにより計算できる。

$$\tau=\int_0^H \beta_e(\mathbf{r},\theta=0)dz \tag{2.3.20}$$

2.3.3 森林・草地キャノピーの構造

a. 樹木の形状のモデル化

光環境の計算を行うキャノピー構造のモデル化には様々な方法が考えられる(図 2.3.4)。最も簡易なモデル化は植生を平行平板層として近似するものである(図 2.3.4 左)。この場合，葉・幹・枝等は平板の中に均質に分布しているものする。平行平面大気の場合と同様に複数の平面層を積み上げることで, 鉛直方向に異なる光学的性質を持つ複数層の植生のシミュレーションを行うことができる。

より現実的な植生キャノピーとして，木本一本一本を幾何学的形状で近似した構造が考えられる (図 2.3.4 中央)。この場合，葉や枝はある幾何オブジェクトの領域内に，統計分布に従って配置しているものとして考えることができる。実際の樹冠形状は回転楕円体や円錐，円柱といった形状でかなり良く近似出来るが，これらの形状の組み合わせやポリゴンを用いて現実的な樹冠形状を作成することも可能である。植生キャノピーを平行平面層や幾何オブジェクトの領域で定義する場合，３章で導入した葉面積密度 u や葉面の傾き分布関数 g_L を使って領域内の光学的性質を定義できる。

さらに，葉や幹の含まれる領域をポリゴン形状でモデル化するのではなく，個々の葉や枝，幹等をポリゴンで詳細にモデル化することで，非常に現実的な植生形状を作成することも可能である(図 2.3.4 右)。この場合，葉や枝の大きさ・傾きを詳細に再現で

きる反面，シーンモデルを作成するのに多くの労力を必要とするだけでなく，実際の放射伝達シミュレーションにも多くの計算時間が必要となる。

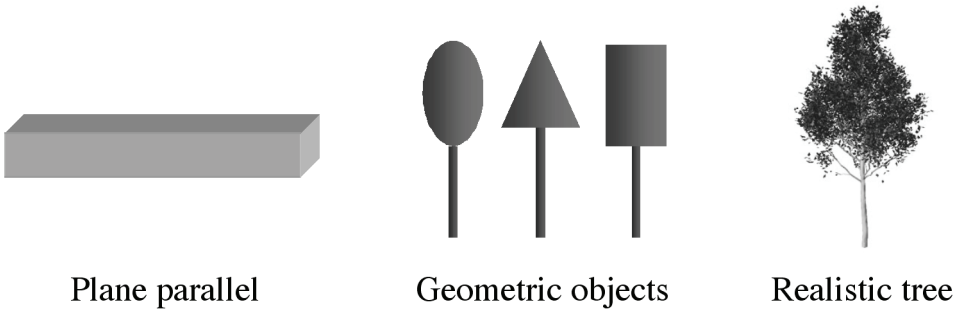


図 2.3.4　様々な植生キャノピーの形状。左から平行平板層，幾何形状で近似した樹木。現実に近い形状の樹木

b. 植生キャノピーのシーン作成

個々の樹木をモデル化する場合には，樹木のサイズや位置を決定する必要がある。樹木の位置データなどの観測データが入手出来る場合には，これらのデータを用いて植生キャノピーを作成できる。また，それ以外の場合には生態学的な知見に基づいて樹木のサイズ・位置を決定することになる。森林動態モデル等のアウトプットが利用できる場合には，それらのデータを用いることも可能である。図 2.3.5 は，森林キャノピーシーンの一例である。

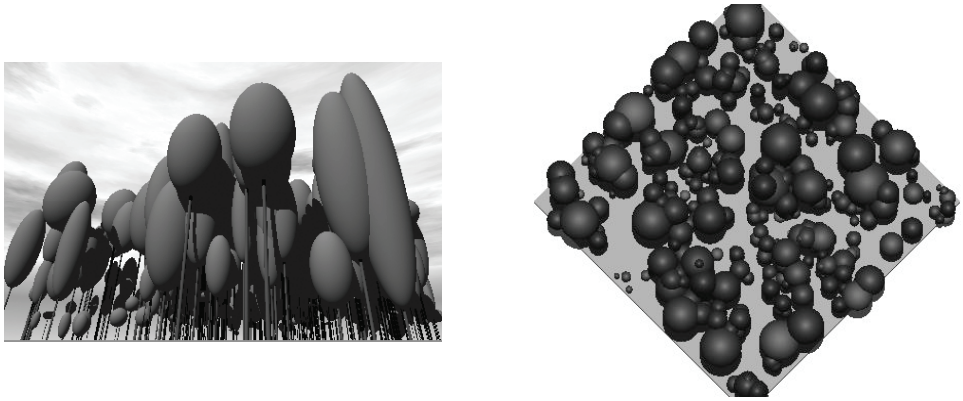


図 2.3.5　森林キャノピーシーンの一例

第３章　基本的なアルゴリズム

3.1 乱数の生成

一様乱数の発生と任意の確率密度関数 (PDF) に従う乱数の発生について議論する。一般に任意の PDF に従う乱数は例外なく一様乱数から何らかの方法で変換して発生させる。

3.1.1 一様乱数の生成

[0,1) の区間に一様に分布する乱数の発生法には様々なものがある。その代表的なものは「合同線形法」である。n 番目の整数を

$$I_n = aI_{n-1} + b \pmod{m} \tag{3.1.1}$$

という漸化式により求める。m を「法 (modulus)」，a を「乗数 (multiplier)」という。[0,1) の実数に変換するには，

$$\rho = I/m \tag{3.1.2}$$

とすればよい。m が十分に大きければこの乱数は十分な階調を持つ。合同線形法の特別な場合として $b = 0$ の場合がある。漸化式は，

$$I_n = aI_{n-1} \pmod{m} \tag{3.1.3}$$

であり，これを「乗算合同法」という。乗算合同法は合同線形法と同程度によいものであるということが理論的にも経験的にもわかっている。ただし法と乗数は注意して選ばなければならない。Park and Miller の「最低基準」生成法 (minimal standard generator)では，

$$a = 7^5 = 16807,\ m = 2^{31} - 1 = 2147483647 \tag{3.1.4}$$

を提案している（Press et al. 1992: Numerical Recipes, 以下 NR）。これの周期は $2^{31} - 2 = 2.1 \times 10^9$ である。(3.1.3) の計算は桁溢れを起こすが，その場合の結果は計算機の機種に依存してしまう。この場合に整数の桁溢れを用いずに計算するポータブルな方法が NR (“ran0”) に載っている。合同線形法の最大の欠点は「系列相関」（あるいは「多次元疎結晶構造」）である。これについては伏見 (1989), NR などを参照されたい。乱数列の「切りまぜ」によってこの弱点を補う方法が NR に載っている（”ran1”）。

乱数の質の良さを測るために様々な基準と検定法が有る。これまでに提案されている乱数生成法のうち比較的性質がよくわかっており，十分に長い周期と再現性や一様性などの面で優れた生成法は「M 系列」（または「線形最大周期列」，Maximum-length linearly-recurring sequence）法である。M 系列はフィードバック付きシフトレジスタ系列とも呼ばれる。漸化式は一般には

$$g_n = a_1 g_{n-1} + a_2 g_{n-2} + \cdots + a_p g_{n-p} \pmod 2 \tag{3.1.5}$$

である。g_n ($n = 1, 2, \ldots, p$) の初期値は全てが 0 でない限り任意に選んでよい。この数列は 1 ビット（0 or 1）の数値を持ち，ガロア体 GF(2) 上で定義され（伏見，1989），計算機の上では排他的論理和で演算が可能である。周期は $2^p - 1$ である。N ビット長の整数は N 個の 1 ビット整数から構成することができる。一例として伏見 (1989) では以下の漸化式を用いた方法が述べられている。

$$g_n = g_{n-32} + g_{n-521} \pmod 2 \tag{3.1.6}$$

一個の 32 ビット整数は上の漸化式で生成される連続した 32 個の g によって構成される。この 32 ビット整数乱数列の周期は，$2^{521-32} - 1 \sim 3 \times 10^{147}$ であり，今日の計算機でこの周期を使い尽くすのは不可能である。この方法は一つの乱数を発生するために，整数同士の排他的論理和を 1 回だけ計算すればよい。一般にビット演算は四則演算よりも高速に計算することができる。そのためこの方法は非常に高速で，実際今日頻繁に利用されている乱数生成法（例えば NR に載っている方法）よりも速い。

やはりビット演算のみを使う良質な生成法に，「メルセンヌツイスター」（Google で見つかる）という方法もある。

3.1.2 変換法（逆関数法）

一般的な PDF に従う乱数の発生法について考える。x の区間 a–b について与えられた PDF, $g(x)$ を考える。

$$\int_a^b g(x)dx = 1 \tag{3.1.7}$$

と規格化されている。この PDF に従うランダムな変数 X を求めるには，[0, 1) の一様乱数をρとして，

$$G(X) = \int_a^X g(x)dx = \rho \tag{3.1.8a}$$

$$X = G^{-1}(\rho) \tag{3.1.8b}$$

と決定される。上の積分が解析的に解けてかつ逆関数が求められる時はこの方法が使える。以下に例を挙げる。

a. 指数分布

平均が 1 の指数分布の場合，

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x},\ x \geq 0 \tag{3.1.9a}$$

$$G(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \tag{3.1.9b}$$

$$G^{-1}(x) = -\log(1-x) \tag{3.1.9c}$$

であるから，

$$X = -\log(1-\rho) = -\log\rho',\quad \rho' > 0 \tag{3.1.10}$$

とすれば指数分布に従う乱数 X が生成できる。平均が μ の場合は，

$$X = -\mu\log\rho',\quad \rho' > 0 \tag{3.1.11}$$

で乱数 X が生成できる。

b. 正規（ガウス）分布

平均 0, 分散 1 のガウス分布（標準正規分布）の場合は，PDF が

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{3.1.12}$$

であり，以下のように正規乱数二つを発生できる（Box-Muller 法：NR 参照）。

$$X_1 = \sqrt{-2\log\rho_1}\cos(2\pi\rho_2)$$
$$X_2 = \sqrt{-2\log\rho_1}\sin(2\pi\rho_2) \tag{3.1.13}$$

しかし，(3.1.13) はそのままではあまり高速ではない。後述の棄却法を応用して sin, cos の計算を回避することができる（極座標法：Appendix A6 参照）。

1) ρ_1, ρ_2 を発生
2) 原点を中心とする面積 4 の正方形の中に一様に分布する点の座標を決める
$$W_1 = 2\,\rho_1 - 1,\ W_2 = 2\,\rho_2 - 1 \tag{3.1.14a}$$
3) 原点からの距離を求める
$$R^2 = W_1^2 + W_2^2 \tag{3.1.14b}$$
4) $R^2 < 10^{-12}$ または $R > 1$ なら (1) に戻る
5) 方位角の正弦，余弦と一個の一様乱数が次のように求まる
$$\rho_1 = R^2,\ \cos\phi = W_1/R,\ \sin\phi = W_1/R \tag{3.1.14c}$$
6) 結局，正規乱数は以下の式で決まる
$$X_1 = \frac{W_1}{R}\sqrt{-2\log R^2},\ X_2 = \frac{W_2}{R}\sqrt{-2\log R^2} \tag{3.1.14d}$$

平均 μ, 標準偏差 σ のガウス分布に従う変数を生成するには，まず前述のように標準正規分布に従う乱数を求めた後で，

$$X' = \sigma X + \mu \tag{3.1.15}$$

を計算すれば良い。

c. ガンマ分布：α が整数の場合

形状パラメータ α, スケールパラメータが 1 のガンマ分布の PDF は，

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x} \tag{3.1.16}$$

である。$\alpha = 1$ のときは指数分布になる。形状パラメータ α_1, α_2 のガンマ分布に従う変数同士を足し合わせると，その和は形状パラメータ $\alpha_1 + \alpha_2$ のガンマ分布に従う。これ

をガンマ分布の再生性という。この性質と指数分布の場合の式 (3.1.10) を利用すると，α が整数のとき（アーラン分布とも呼ばれる），

$$\begin{aligned} X &= -\log\rho_1 - \log\rho_2 - \cdots - \log\rho_\alpha \\ &= -\log(\rho_1\rho_2\cdots\rho_\alpha) \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

はパラメータ α のガンマ分布に従う。α が小さいときはこれが最良の方法であるが，大きいときにはもっと効率的な方法を用いるべきである。この場合の生成法は伏見 (1989) を参照されたい。

d. 離散分布

確率変数 X が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の離散的な値をとり，それぞれの確率が $p_1, p_2, \ldots, p_n$ のとき，この離散分布に従う乱数 X は以下のように決定される。

$$X = x_k,\ \text{if} \sum_{i=1}^{k-1} p_i \le \rho < \sum_{i=1}^{k} p_i \tag{3.1.18}$$

3.1.3 LUT 法

式 (3.1.8a) or (3.1.8b) が解析的に計算できない場合は数値的に計算して，様々な ρ に対する $X = G^{-1}(\rho)$ の Look-Up-Table (LUT) を作成しておく方法が考えられる。または，様々な x に対する $\rho = G(X)$ の LUT でもよい。前者の方が効率的にはよい。x は LUT から内挿して求める。LUT の解像度がこの方法の精度を左右する。いずれにしても厳密解は求められない。

変数が２個以下の LUT であれば，線形内挿またはスプライン内挿で容易に求められる。問題はより多次元の LUT の場合である。仮に線形内挿を用いるにしても相当な時間がかかる。最も拙速なのは最近隣内挿である。しかし精度は良くない。しかも多次元だと使用するメモリも巨大なるので，あまりグリッドを細かくとることが出来ない。これらの理由から，高次元の LUT では高速・高精度は期待できない。

3.1.4 棄却法（採択−棄却法）

次式を満たすような任意の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) \ge g(x) \tag{3.1.19}$$

$f(x)$ を「比較関数」と呼ぶ。ただし $f(x)$ は解析的に積分できてしかも逆関数が容易に求められる関数とする。

$$F(x) = \int_a^x f(x')dx' \tag{3.1.20}$$

とおくと，

$$\frac{\int_a^x f(x')dx'}{\int_a^b f(x')dx'} = \frac{F(x)}{F(b)} = \rho_1 \tag{3.1.21a}$$

$$\therefore x = F^{-1}\left(\rho_1 F(b)\right) \tag{3.1.21b}$$

によって PDF の形が $f(x)$に従うような変数 x をランダムに決めることができる。この方法を棄却法または採択-棄却法という（伏見, 1989; Press et al. 1992）。von Neumann によって考案された棄却法はとりあえず $f(x)$ に従うランダム変数を求めた後で，これを棄却するか採択するかをランダムに決める方法である。式 (3.1.21b) の x が最終的に PDF = $g(x)$ に従う変数である確率は $g(x) / f(x)$ で与えられる。よって新たに乱数を一個発生させて，

$$\begin{cases} \text{If } \rho_2 < g(x)/f(x), \text{ finish.} \\ \text{If } \rho_2 \geq g(x)/f(x), \text{ rejection.} \end{cases} \tag{3.1.22}$$

を判定する。「棄却」の場合は再度式 (3.1.21b) によって x を決める。この方法の利点は $g(x)$ が複雑な関数であっても，厳密な解が得られることである。しかし，繰り返し計算が必要なので効率に注意すべきである。効率は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) \tag{3.1.23}$$

が 1 に近いほどよい。よってそのような比較関数を見つけることが肝要である。

比較関数としては区形分布，三角分布，台形分布などがよく用いられる。例えば g が区間 a–b の中であまり激しく変動せず，その最小値・最大値があまり違わないような場合は，g の最大値を $g_{\max}$ として，

$$f(x) = g_{\max} \tag{3.1.24}$$

という一様分布（区形分布）を考えるのが最も単純な方法である。この場合，

$$F(x) = g_{\max}(x-a) \tag{3.1.25}$$

となり，

$$x = a + \rho(b-a) \tag{3.1.26}$$

により，区形分布 f に従う x が決まる。

問題なのは鋭いピークを持つ関数などのように最大値・最小値が大きく異なる関数では，上述のような区形分布では効率が非常に悪いことである。良質な（効率的な）比較関数を見つけるのはしばしば困難である。しかも PDF の最大値を見つけること自体難しい場合がある。

3.1.2 小節で述べたように円内に一様に分布するランダムな点の座標の決定法（極座標法）は棄却法の応用例である。同様に，例えば三次元空間内の任意の幾何学形状をもつボリュームの中に一様に分布するランダムな点を棄却法を用いて決めることができる。

3.1.5 重み付け法

発生させる個々のランダム変数 x に対して「ウェイト」(w) という量を持たせて，各 x に対応する w が変化して良いなら，非常に拙速な方法がある。

考えている PDF $g(x)$ と同じ区間で規格化された PDF $h(x)$ を考える。

$$\int_a^b h(x)dx = 1 \tag{3.1.27}$$

が成り立つ。まず $h(x)$ に従うようなランダム変数 x を何らかの方法で求める（逆関数法，LUT 法，棄却法のいずれでも良い）。この変数 x に対して，ウェイト

$$w(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \tag{3.1.28}$$

を与えれば変数とウェイトの一組で PDF $g(x)$ に従うような分布を表すことが出来る。

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \int_a^x g(x')dx' \\
&= \int_a^x \frac{g(x')}{h(x')} h(x')dx' \\
&= \int_a^x w(x')h(x')dx'
\end{aligned}
\tag{3.1.29}
$$

である。

例として，h が一様分布関数

$$
h(x) = \frac{1}{b-a} \tag{3.1.30}
$$

の場合を考える。これに従うランダム変数 x は次式で決まる。

$$
x = a + \rho(b-a) \tag{3.1.31}
$$

ウェイトは,

$$
w(x) = (b-a)g(x) \tag{3.1.32}
$$

で与えられ，単に PDF, $g(x)$ に比例したウェイトが x に対して付けられることになる。

この方法の欠点はウェイトが 0 から無限大の範囲にばらつく可能性があることである。モンテカルロ積分でこのウェイトをサンプリングした場合ノイズが非常に大きくなる可能性がある。利用法としては例えば次のような場合が考えられる。前節の棄却法を用いて $g(x)$ にある程度近い分布 $h(x)$ に従う変数 x を生成，その後ウェイトを式 (3.1.28) で与えて，確率分布全体のバランスを調整するという方法である。

3.1.6 メトロポリス法

狭義の意味でのモンテカルロ法として，マルコフ連鎖モンテカルロ法（Markov chain Monte Carlo, MCMC）がある。「メトロポリス法」は MCMC のための一つの方法である。もともとは統計物理学の分野で開発されたが，一般的な PDF に従う乱数の発生法として使うことができる。

マルコフ連鎖とは現在の状態がその直前の状態にのみに依存している系列のことである。メトロポリス法では, 以下のステップによって PDF, $g(x)$ に従う乱数 X を決める。

1) 次の候補：現在の値 X_t からランダムに変化した新しい値 X' を選ぶ

2) 「遷移確率」の計算：$g(X')/g(X_t)$を選ぶ

3) 状態更新：一様乱数を生成し，次の値を決める。

$$X_{t+1} = \begin{cases} X' & \text{if } \rho \le g(X')/g(X_t) \\ X_t & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.1.33}$$

この方法で作られるサンプル列 $X_1, X_2, \ldots$ の間には強い相関が残る。つまり，連続して同じ値を持つ X が高い頻度で発生する。この点が通常のサンプリング法（前節までに述べた）との顕著な違いであり，このような乱数列を使ったサンプリング法は通常の意味でのモンテカルロ法とは区別される。乱数列の強い相関が積分結果に悪影響を及ぼす可能性がないか検討すべきである。

3.1.7 合成法

PDF が複数の PDF の組み合わせで表現できるとき，PDF は

$$g(x) = p_1 g_1(x) + p_2 g_2(x) + \cdots + p_n g_n(x) \tag{3.1.34}$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \tag{3.1.35}$$

$$\int_a^b g_i(x)dx = 1;\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{3.1.36}$$

という形に分解できる。このとき，まず離散分布の PDF, p_i に従っているランダムな整数 i を決める。次に $g_i(x)$ に従う乱数 X を決める。その決め方は前述のいずれの方法を用いても良い。

3.1.8 乱数生成法についてのまとめ

結論として，解の正確さと汎用性の高さから棄却法が高く推薦できる。この方法は大きなメモリを必要とせず厳密解を高速に求めることができる。PDF が積分できる必要も逆関数を求める必要もない。必要なのは PDF の値を何回か計算して乱数による判定をすることだけである。二次元 PDF から二個のランダム変数を生成する場合でも容易に応用できる。

様々な方法の特徴をまとめると以下のようになる。

表 3.1.1 様々な乱数生成法の長所と短所

	長所	短所
逆関数法	・正確である ・簡単な関数では高速である	・逆関数が解析的に求められないときには使えない
LUT 法	・任意の PDF で近似解が得られる	・大きなメモリ領域が必要 ・LUT のグリッドが粗いと精度が悪い
棄却法	・任意の PDF で正確な解が得られる	・良質な比較関数を見つけるのがしばしば困難である
重み付け法	・非常に簡単	・モンテカルロシミュレーションのノイズが増大する
メトロポリス法	・任意の PDF で正確な解が得られる	・乱数列はマルコフ連鎖となり，連続する乱数が互いに強い相関を持つ

3.2 放射源からの射出

放射源からの光の射出について考える。放射源としては太陽入射光，大気・地表面からの熱放射，人工的な照明・レーザー光などの点光源（宇宙空間内の恒星もこの部類に入る）を考える。

3.2.1 射出エネルギーとモデル光子の分布

モンテカルロモデルでモデル光子一個が輸送する放射エネルギーは，一般的にはモデル領域全体から射出されるエネルギーをモデル光子の総数で割ったものである。ウェイトが 1 のモデル光子の輸送するエネルギーE_1は次式で与えられる。

$$E_1 = \frac{E_{\mathrm{tot}}}{N_{\mathrm{tot}}} \tag{3.2.1a}$$

$$E_{\mathrm{tot}} = \sum_i \sum_j \sum_k E(i,j,k) \tag{3.2.1b}$$

ここで，E は要素（ボクセルまたは表面要素）の射出エネルギー，(i, j, k) はそれぞれ (x, y, z) に対応する要素インデックスである。

要素内で射出フッラクスが水平方向に一様の場合，$A(i, j)$ をモデル気柱 (i, j) の水平断面積とし，$F(i, j, k)$ を要素 (i, j, k) からの射出フラックスすると，

$$\begin{aligned} E(i,j,k) &= \iint F(x,y,k)dxdy \\ &= F(i,j,k)A(i,j) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

が成り立つ。太陽放射や熱放射ではこのように書ける。点光源ではそもそも「射出フラックス」という量が定義できない（射出点においては無限大のフラックスを持つと考えられる）。点光源の場合は射出される電力 E が有限な値で与えられる。様々な種類の放射源の混合を考える場合，射出エネルギーの総量は，

$$E(i,j,k) = E_{\mathrm{solar}}(i,j,k) + E_{\mathrm{thermal}}(i,j,k) + E_{\mathrm{point}}(i,j,k) + \cdots \tag{3.2.3}$$

という具合に与えられ，それぞれの成分の大きさに応じてモデル光子の数を分配すればよい。

射出点の位置を乱数によって決める方法はいろいろ考えられる。例えば空間を分割し，それぞれの領域に同じ数のモデル光子を分配し，モデル光子の輸送するエネルギーは領

域によって異なるというものである。しかし，最もリーズナブルな方法は，E の三次元分布に比例するようにモデル光子を分布させる方法である。ここではまず E の三次元分布に基づいて射出する要素を決め, 次にその要素内部の射出エネルギーの分布に基づいて位置を決める方法を考える。今 E を気柱全体について積算したものを E_{col} とする。

$$E_{\mathrm{col}}(i,j)=\sum_{k=0}^{N+1}E(i,j,k) \tag{3.2.4}$$

ここで $k=0$ は地表面に対応し, $k=N+1$ は大気上端（太陽光の入射する層）に対応する。モデル気柱 (i, j) に入射するモデル光子の平均の数は,

$$\overline{N}_{\mathrm{col}}(i,j)=N_{\mathrm{tot}}\frac{E_{\mathrm{col}}(i,j)}{E_{\mathrm{tot}}} \tag{3.2.5}$$

となる。この数は整数ではないことに注意。N_{col} を整数として,

$$N_{\mathrm{col}}\le\overline{N}_{\mathrm{col}}(i,j)<N_{\mathrm{col}}+1 \tag{3.2.6}$$

が成り立つとき，実際にモデル気柱 (i, j) に入射させるモデル光子の数は，以下のように乱数 ρ によって決めることができる。

$$\begin{cases} N_{\mathrm{col}} & \text{if } \rho\ge\overline{N}_{\mathrm{col}}-N_{\mathrm{col}} \\ N_{\mathrm{col}}+1 & \text{if } \rho<\overline{N}_{\mathrm{col}}-N_{\mathrm{col}} \end{cases} \tag{3.2.7}$$

これにより平均的には (3.2.5) の式が満足される。

次に，モデル気柱の何番目の k の要素から射出されるかを決める。式 (3.2.4) より，k 番目の要素から射出される確率は

$$\frac{E(i,j,k)}{E_{\mathrm{col}}(i,j)} \tag{3.2.8}$$

で与えられる。この離散確率分布に基づいて乱数によって k が決定される。以上で射出する要素が決まった。

次節では様々な放射源について射出フラックスや射出の位置, 方向の決定方法などを述べる。

3.2.2 太陽放射

太陽放射の場合は，(3.2.2) 同様（添え字 i, j を省略），大気気柱の上端に入射するエネルギーは

$$E_{\mathrm{solar}}(k) = \begin{cases} AF_{\mathrm{solar}} & \text{for } k = N+1 \\ 0 & \text{for } k \neq N+1 \end{cases} \tag{3.2.9}$$

と書ける。ここで F_{solar} は水平面に対する太陽放射入射フラックスである。地球に降り注ぐ太陽放射は厳密には鋭く尖った円錐状の角度領域に広がった放射源である。F_{solar} は入射天頂角と太陽—地球間の距離の関数となる。太陽—地球間の距離の変動により 1 年の内に 3% 程度変動する。

放射源が太陽放射のみの場合，射出位置の決定は簡単である。射出フラックスは水平座標に依存しない。モデル領域を $[0, X_{\max}]$, $[0, Y_{\max}]$, $[z_{\mathrm{BOA}}, z_{\mathrm{TOA}}]$ として，乱数を２つ使って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_x X_{\max} \\ \rho_y Y_{\max} \\ z_{\mathrm{TOA}} \end{pmatrix} \tag{3.2.10}$$

により決定される。式 (3.2.1), (3.2.9) よりウェイトが 1 のモデル光子の輸送するエネルギーは次式となる。

$$E_1 = \frac{F_{\mathrm{solar}} X_{\max} Y_{\max}}{N_{\mathrm{tot}}} \tag{3.2.11}$$

射出方向の決定法は 3.2.6 小節で述べる。

3.2.3 点光源

人工的な照明やレーザー光のように点光源の場合もあるコーン状の角度範囲に等方的に射出する放射源と見なすことができる。ただしこの場合は各点光源の射出位置がそれぞれ一点に局在化している。フラックスの空間分布はデルタ関数的になる。それぞれの点光源の射出電力は一般に既知と考えられる。

射出方向の決定は太陽放射と同様であり，3.2.6 小節で述べる方法で行う。射出位置は自明である。

3.2.4 熱放射

a. 大気からの熱放射

大気からの熱放射の場合，k 番目の大気層から射出されるフラックスはその層内部の温度 T の分布と射出係数の分布で決まる。キルヒホッフの法則より，射出係数は吸収係数 β_a に等しい。射出フラックスは，次式となる。

$$F_{\mathrm{therm}}(k) = 4\pi \int_{z_{k-1}}^{z_k} \beta_a(z) B(T(z)) dz \tag{3.2.12}$$

ここで B はプランク関数であり，黒体から熱放射の放射輝度を表現している。

$$B_\lambda(T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \left[\exp(c_2/\lambda T) - 1 \right]} \tag{3.2.13}$$

ここで，λ は波長 (μm), T は絶対温度 (K), $c_1 = 1.1910437\mathrm{x}10^8$, $c_2 = 1.438786\mathrm{x}10^4$ である。

射出係数はボクセル毎に一定と仮定する。プランク関数の鉛直分布は各ボクセル内で n 次の多項式で表現することが多い。

$$B(z) = B(z_{k-1}) + b_1(z - z_{k-1}) + b_2(z - z_{k-1})^2 + \cdots + b_n(z - z_{k-1})^n \tag{3.2.14}$$

ただし通常 $n = 0$ or 1 で充分である。

モデル光子がこのボクセルから射出されるとき，その鉛直座標 z は一般に乱数によって以下の式で決定される。

$$\frac{\int_{z_{k-1}}^{z} B(z) dz}{\int_{z_{k-1}}^{z_k} B(z) dz} = \rho \tag{3.2.15}$$

例えば射出係数がボクセル毎に一定で，かつ (3.2.14) で $n = 1$ のときを考える。

$$B(z) = B(z_{k-1}) + b_1(z - z_{k-1}) \tag{3.2.16a}$$

$$b_1 = \frac{B(z_k) - B(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}} \tag{3.2.16b}$$

と表される。これを (3.2.12) に代入すると，

$$F_{\mathrm{therm}}(k) = 4\pi\beta_a(k)\frac{B(z_{k-1})+B(z_k)}{2}(z_k - z_{k-1}) \tag{3.2.17}$$

が得られる。また射出点の z 座標は，(3.2.15) に (3.2.16) を代入し，

$$\begin{aligned}
&\frac{2\int_{z_{k-1}}^{z}\left[B(z_{k-1})+b_1(z-z_{k-1})\right]dz}{\left[B(z_{k-1})+B(z_k)\right](z_k - z_{k-1})} \\
&= \frac{2\int_0^{z'}\left[B(z_{k-1})+\left(B(z_k)-B(z_{k-1})\right)z'\right]dz'}{B(z_{k-1})+B(z_k)} \\
&= \frac{2\int_0^{z'}\left[1+\gamma z'\right]dz'}{2+\gamma} \\
&= \frac{2z'+\gamma z'^2}{2+\gamma} = \rho
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

を解けば決定する。ここで，

$$z' = \frac{z - z_{k-1}}{z_k - z_{k-1}} \tag{3.2.19a}$$

$$\gamma = \frac{B(z_k)}{B(z_{k-1})} - 1 \tag{3.2.19b}$$

と置いた。結局

$$\gamma z'^2 + 2z' - (2+\gamma)\rho = 0 \tag{3.2.20}$$

を解いて，

$$z' = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+\gamma(\gamma+2)\rho}-1}{\gamma} & \text{for } \gamma \neq 0 \\ \rho & \text{for } \gamma = 0 \end{cases} \tag{3.2.21}$$

$$z = z_{k-1} + (z_k - z_{k-1})z' \tag{3.2.22}$$

が得られる。

射出の角度分布は等方的であり，方向の決定方法は等方散乱の場合と同じである。射出方向の天頂角を θ, 方位角を ϕ としたとき，次式により決定できる。

$$\cos\theta = 1 - 2\rho_1 \tag{3.2.23a}$$
$$\phi = 2\pi\rho_2 \tag{3.2.23b}$$

ρ_1, ρ_2 は乱数である。これらの導出については 3.5.2 小節に述べる。

b. 水平面からの熱放射

等方的な反射面からの熱放射の射出率は方向に依らず 1 – (反射率) で与えられる。非等方的な反射面では射出方向に依って射出率が異なる。ここで天頂角のコサインを μ_0 とする。反射率（アルベド）を α, 射出率を ε で表すと，

$$\varepsilon(\mu_0) = 1 - \alpha(\mu_0) \tag{3.2.24}$$

が成り立つ。地表面温度を T_{sfc} とし，この面からの射出フラックスは

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{therm}}(0) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 B(T_{\mathrm{sfc}})\varepsilon(\mu_0)\mu_0 d\mu_0 d\phi_0 \\ &= 2\pi B(T_{\mathrm{sfc}})\int_0^1 \varepsilon(\mu_0)\mu_0 d\mu_0 \\ &= \pi B(T_{\mathrm{sfc}})\left[1 - 2\int_0^1 \alpha(\mu_0)\mu_0 d\mu_0\right] \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

となる。ここで B はプランク関数である。今「平均反射率」「平均射出率」なるものをそれぞれ

$$\overline{\alpha} = 2\int_0^1 \alpha(\mu_0)\mu_0 d\mu_0 \tag{3.2.26a}$$
$$\overline{\varepsilon} = 1 - \overline{\alpha} \tag{3.2.26b}$$

と置くと，(3.2.25) の射出フラックスは

$$F_{\mathrm{therm}}(0) = \pi B(T)\overline{\varepsilon} \tag{3.2.27}$$

となる。

次に射出方向の決定を考える。射出率が方向に依存しない場合（等方的に射出する場合）はランバート反射のときと同様に射出方向が決まる。射出方向の天頂角の余弦と，方位角はそれぞれ次式により決定できる。

$$\mu_0 = \sqrt{\rho_1} \tag{3.2.28a}$$
$$\phi_0 = 2\pi\rho_2 \tag{3.2.28b}$$

ρ_1, ρ_2 は乱数である。これらの導出については 3.6.3 小節に述べる。

非等法的に射出する面の場合は，以下のように天頂角を棄却法で決める。まず (3.2.28a) と同様にランダムに天頂角を選ぶ。次にその方向における射出率（3.2.24）を計算し，確率 $\varepsilon(\mu_0)/\varepsilon_{\max}$ に対して棄却法を適用する。ここで $\varepsilon_{\max}$ は射出率の最大値である（ただしおよその値でよい)。射出率は 1 を超えることはないので棄却法の効率が良い。方位角は (3.2.28b) と同様に一様ランダムに決める。

3.2.5 重要度に基づいた放射源空間分布の修正

上で述べたように射出エネルギーの空間分布に比例するように光子をばらまくのが最もリーズナブルである。しかし，何らかの理由でこの光子の分布を修正したい場合があるかもしれない。例えば，射出エネルギーが小さい要素からの射出が重要であるような放射量をサンプリングしたい場合である。上記の方法ではこの要素から射出する光子数は小さいので，放射量のサンプリングの頻度が小さく，ノイズを減らすためには全体に光子を大量に投入する必要がある。別な例では，太陽放射と熱放射の両方が混在する中間赤外の波長帯の計算をするとき，全体としては太陽放射の方が射出エネルギーは大きいけれども，今計算したい放射量に対しては熱放射の方が重要である，というような状況が考えられる。このような場合「重要な部分」に相対的に投入する光子数を増やし，そのかわりに光子のもつウェイトを修正するという方法が有効である。この節の以下では一例として，三次元空間で定義された「重要度関数 (importance function)」に基づいて光子の分布とウェイトを修正する方法を述べる。

今射出エネルギー$E(i, j, k)$ と重要度関数 $G(i, j, k)$ が三次元空間内の各要素について与えられているとしよう。ただし，G は正の値を持たなければならない。総射出エネルギーを E_{tot} で定義すると，要素 (i, j, k) における光子の射出確率とウェイトは，通常の方法では，

$$p(i,j,k) = E(i,j,k)/E_{\mathrm{tot}} \tag{3.2.29a}$$

$$w(i,j,k) = 1 \tag{3.2.29b}$$

で与えられ，p は

$$\sum_i \sum_j \sum_k p(i,j,k) = 1 \tag{3.2.30}$$

と規格化されている。ここで，光子の射出確率分布が E と G の積に比例するように修

正しよう。

$$p'(i,j,k) = G(i,j,k)E(i,j,k)/E_{\mathrm{tot}} \tag{3.2.31}$$

と置けば，新しい射出確率分布

$$p''(i,j,k) = \frac{p'(i,j,k)}{\sum_i \sum_j \sum_k p'(i,j,k)} = \frac{G(i,j,k)E(i,j,k)}{\sum_i \sum_j \sum_k G(i,j,k)E(i,j,k)} \tag{3.2.32}$$

は規格化の条件

$$\sum_i \sum_j \sum_k p''(i,j,k) = 1 \tag{3.2.33}$$

を満たす。各要素では射出確率とウェイトと積が保存されていなければならない。よって，

$$p''(i,j,k)w''(i,j,k) = p(i,j,k)w(i,j,k) \tag{3.2.34}$$

が成り立つ。これに (3.2.29), (3.2.32) を代入すると，新しいウェイト，

$$\begin{aligned} w''(i,j,k) &= \frac{p(i,j,k)w(i,j,k)}{p''(i,j,k)} \\ &= \frac{\sum_i \sum_j \sum_k G(i,j,k)E(i,j,k)}{G(i,j,k)E_{\mathrm{tot}}} \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

が得られる。p, w の替わりに p'', w'' を使えば重要度関数 G に基づいた光子の分布が可能となる。この修正によるバイアスは生じない。このようにモデル光子の頻度分布とウェイトを同時に調節する方法は分散減少法の一つとして有効である。

3.2.6 等方的に射出する放射源

ある一点から任意の方向を向いた円錐状の角度範囲に等方的に射出する放射源を考える（反射の場合も同じ問題）。この放射源の放射照度や放射輝度および射出方向の MC 法による決定について議論する。光子の射出方向を乱数で決めるとき，個々の光子の水平面に対する放射照度が等しくなるようにしなければならない。特別な場合（角度領域

の中心が真上または真下を向いているとき，または角度の幅が 0°, 180°, or 360°のとき）は解析的に決まるが，一般には解析的に定まらない。よって，LUT 法か棄却法を用いる必要がある。

以下の議論は光源が太陽放射やレーザービーム，人工的な照明などの場合に適用できる。

a. 定義

座標系を天頂角 θ と方位角 ϕ で表す。射出する方向の円錐状角度領域の中心方向を(Θ, Φ)とし，(Θ, Φ) から測った天頂角と方位角をそれぞれ $\hat{\theta},\hat{\phi}$ とする（図 3.2.1）。射出方向 (θ, ϕ) は方向 (Θ, Φ) を $\hat{\theta},\hat{\phi}$ だけ回転させた方向と考えられるので，$\hat{\theta},\hat{\phi}$ が決まれば大気中での散乱と同じ式で，(θ, ϕ) が求められる。

射出の角度領域の半幅（円錐の中心方向からの最大の角度）を Δ とする。一般には

$$0 \le \Delta \le \pi$$

であり，

$\Delta = 0$:	collimated radiation
$\Delta = \pi/2$:	半球等方的 (Lambertian)
$\Delta = \pi$:	全球等方的

である。

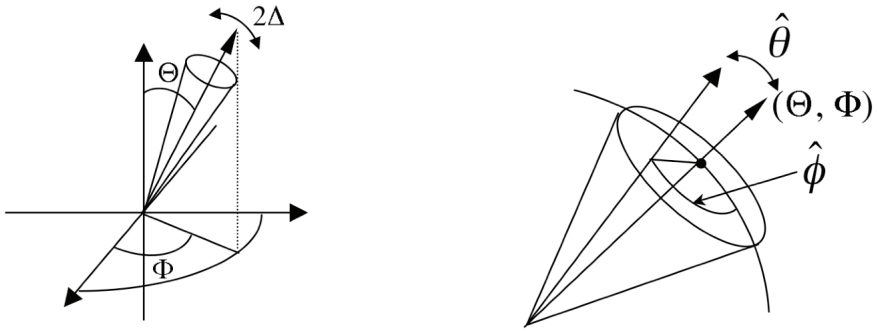


図 3.2.1 円錐状の角度領域に等方的に射出する放射源の模式図

b. 放射照度と放射輝度

射出の角度領域の中心方向に垂直な平面に対する放射照度が既知で F_0 と与えられたとき，角度領域内部の放射輝度を R_0 として，

$$F_0 = \int_0^{2\pi} \int_{\cos\Delta}^{1} R_0 \left|\cos\hat{\theta}\right| d\cos\hat{\theta} d\hat{\phi} \tag{3.2.36}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} \upsilon(\Delta) &= \int_0^{2\pi} \int_{\cos\Delta}^{1} \left|\cos\hat{\theta}\right| d\cos\hat{\theta} d\hat{\phi} \\ &= \pi\left(1 - \cos\Delta\left|\cos\Delta\right|\right) \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

と置くと，放射照度と放射輝度の関係は

$$F_0 = R_0 \upsilon(\Delta) \tag{3.2.38a}$$

$$R_0 = \frac{F_0}{\upsilon(\Delta)} \tag{3.2.38b}$$

と書ける。放射輝度は F_0 とΔが与えられれば一意に決まることになる。球面放射照度 (spheradiance) $\widehat{F}_0$ は,

$$\begin{aligned} \widehat{F}_0 &= \int_0^{2\pi} \int_{\cos\Delta}^{1} R_0 d\cos\hat{\theta} d\hat{\phi} \\ &= 2\pi R_0 (1 - \cos\Delta) \\ &= F_0 \frac{2(1-\cos\Delta)}{1 - \cos\Delta\left|\cos\Delta\right|} \\ &= \begin{cases} F_0 \dfrac{2}{1+\cos\Delta} & \text{if } \cos\Delta \geq 0 \\ F_0 \dfrac{2(1-\cos\Delta)}{1+\cos^2\Delta} & \text{if } \cos\Delta < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

であり，やはり F_0 とΔが与えられれば一意に決まる。

水平面に対する放射照度は,

$$\overline{F}_0(\Theta, \Delta, R_0) = \int_0^{2\pi} \int_{\cos\Delta}^{1} R_0 \left|\cos\theta\right| d\cos\hat{\theta} d\hat{\phi} \tag{3.2.40}$$

で与えられる。ここで注意すべきは $\cos\theta$ が $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ の関数であることである。

$$\cos\theta = \sin\Theta \sin\hat{\theta} \cos\hat{\phi} - \cos\Theta \cos\hat{\theta} \tag{3.2.41}$$

水平面に対する「放射照度投影因子」を

$$\overline{\upsilon}(\Theta,\Delta)=\int_0^{2\pi}\int_{\cos\Delta}^{1}|\cos\theta|d\cos\hat{\theta}d\hat{\phi} \tag{3.2.42}$$

と定義する。(3.2.37) との違いは投影する面の違いである。 (3.2.40) の放射照度は (3.2.38b) (3.2.42) を使うと

$$\begin{aligned}\overline{F}_0(\Theta,\Delta,R_0)&=R_0\overline{\upsilon}(\Theta,\Delta)\\&=F_0\frac{\overline{\upsilon}(\Theta,\Delta)}{\upsilon(\Delta)}\end{aligned} \tag{3.2.43}$$

となる。一般に (3.2.42) の二重積分を解析的に求めるのは難しい。後述のように部分的には解析的に積分できる。

c. 角度分布関数

立体角を ξ として，以下のように規格化された角度分布関数 Ψ を考える。

$$\int_{4\pi}\Psi_0(\theta,\phi)|\cos\theta|d\xi=1 \tag{3.2.44}$$

この関数 Ψ_0は放射源から射出される放射輝度を計算する際に必要となる（3.9 節)。ここで考えているような等方的な放射源の場合，角度分布関数は，

$$\Psi_0(\theta,\phi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\upsilon}(\Theta,\Delta)} & \text{if } \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}_0>\cos\Delta\\ 0 & \text{if } \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}_0\le\cos\Delta\end{cases} \tag{3.2.45}$$

$$\mathbf{\Omega}=\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix},\ \mathbf{\Omega}_0=\begin{pmatrix}\Theta\\ \Phi\end{pmatrix}$$

で与えられる。だたし，コーン領域に入っているかどうかの判断は Δ が小さいときには $\cos\Delta$ よりも $\sin\Delta$ を用いて判断した方がよい。

d. 水平面に対する放射照度投影因子

式 (3.2.42) の因子の計算方法を考える。図 3.2.2 のような三つのケースが考えられる。

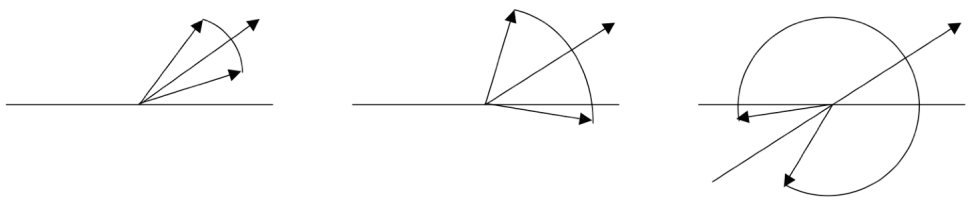


図 3.2.2 三つのケース

1) 射出方向が常に上向きまたは常に下向きの場合

この場合 $\Delta \le |\pi/2-\Theta|$ ($\cos\Delta \ge \sin\Theta$)である。このとき $\cos\theta$ は積分領域全体で正か負かのいずれかであり，

$$\begin{aligned}\bar{\upsilon}(\Theta,\Delta) &= 2\int_{\cos\Delta}^{1}\int_{0}^{\pi}\left|\sin\Theta\sin\hat{\theta}\cos\hat{\phi}-\cos\Theta\cos\hat{\theta}\right|d\hat{\phi}d\cos\hat{\theta} \\ &= 2\pi\left|\cos\Theta\right|\int_{\cos\Delta}^{1}\cos\hat{\theta}d\cos\hat{\theta} \\ &= \pi\left|\cos\Theta\right|\sin^2\Delta\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

となる。水平面に対する放射照度は， (3.2.37), (3.2.43) より，

$$\begin{aligned}\bar{F}_0(\Theta,\Delta,R_0) &= F_0\frac{\pi\left|\cos\Theta\right|\sin^2\Delta}{\pi\left(1-\cos\Delta\left|\cos\Delta\right|\right)} \\ &= F_0\left|\cos\Theta\right|\end{aligned} \tag{3.2.47}$$

となる。

2) 射出方向が上向きと下向きの両方をとる場合 1

$|\pi/2-\Theta| < \Delta < \pi-|\pi/2-\Theta|$ ($-\sin\Theta < \cos\Delta < \sin\Theta$)である。まず $\cos\hat{\theta} \ge \sin\Theta$ の部分については上記と同じように解析的に積分できる。

$$\begin{aligned}\bar{\upsilon}_{\mathrm{a}}(\Theta,\Delta) &\equiv \int_{0}^{2\pi}\int_{\sin\Theta}^{1}\left|\cos\theta\right|d\cos\hat{\theta}d\hat{\phi} \\ &= \pi\left|\cos\Theta\right|\left(1-\sin^2\Theta\right) \\ &= \upsilon\pi\left|\cos\Theta\right|^3\end{aligned} \tag{3.2.48}$$

それ以外の部分については，被積分関数の中にある $\cos\theta$ はその正負が $\cos\hat{\phi}$ によって変わり，以下のように一重積分の形に書ける。

$$
\begin{aligned}
\overline{\upsilon}_{\mathrm{b}}(\Theta,\Delta) &\equiv \int_0^{2\pi}\int_{\cos\Delta}^{\sin\Theta}\left|\cos\theta\right| d\cos\hat{\theta}\, d\hat{\phi} \\
&= 2\int_{\cos\Delta}^{\sin\Theta}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\phi_s}\left(\sin\Theta\sin\hat{\theta}\cos\hat{\phi}-\cos\Theta\cos\hat{\theta}\right)d\hat{\phi} \\ \displaystyle-\int_{\phi_s}^{\pi}\left(\sin\Theta\sin\hat{\theta}\cos\hat{\phi}-\cos\Theta\cos\hat{\theta}\right)d\hat{\phi}\end{array}\right]d\cos\hat{\theta} \\
&= 2\int_{\cos\Delta}^{\sin\Theta}\left[2\sin\Theta\sin\hat{\theta}\sin\phi_s+\cos\Theta\cos\hat{\theta}(\pi-2\phi_s)\right]d\cos\hat{\theta}
\end{aligned}
\tag{3.2.49}
$$

ここで,

$$
\cos\phi_s = \frac{\cos\Theta\cos\hat{\theta}}{\sin\Theta\sin\hat{\theta}} \tag{3.2.50a}
$$

$$
\sin\phi_s = \frac{\sqrt{\sin^2\hat{\theta}-\cos^2\Theta}}{\sin\hat{\theta}\sin\Theta} \tag{3.2.50b}
$$

である。

$$
t = \cos\hat{\theta}
$$

と置くと，以下のように部分的には解析的に求まる。

$$
\begin{aligned}
\overline{\upsilon}_{\mathrm{b}}(\Theta,\Delta) &= 4\int_{\cos\Delta}^{\sin\Theta}\sqrt{\sin^2\Theta-t^2}\,dt+2\cos\Theta\left[\pi\int_{\cos\Delta}^{\sin\Theta}t\,dt-2\int_{\cos\Delta}^{\sin\Theta}t\phi_s(t)\,dt\right] \\
&= 2\left[t\sqrt{\sin^2\Theta-t^2}+\sin^2\Theta\sin^{-1}\left(\frac{t}{\sin\Theta}\right)\right]_{\cos\Delta}^{\sin\Theta} \\
&\quad +2\cos\Theta\left[\frac{\pi}{2}\left(\sin^2\Theta-\cos^2\Delta\right)-2\int_{\cos\Delta}^{\sin\Theta}t\phi_s(t)\,dt\right] \\
&= \sin^2\Theta\left[\pi-2\sin^{-1}\left(\frac{\cos\Delta}{\sin\Theta}\right)\right]-2\cos\Delta\sqrt{\sin^2\Theta-\cos\Delta^2} \\
&\quad +\cos\Theta\left[\pi\left(\sin^2\Theta-\cos^2\Delta\right)-4\int_{\cos\Delta}^{\sin\Theta}t\phi_s(t)\,dt\right] \\
&= \sin^2\Theta\left[\pi-2\sin^{-1}\gamma\right]-2\cos\Delta\sin\Theta\sqrt{1-\gamma^2} \\
&\quad +\cos\Theta\sin^2\Theta\left[\pi\left(1-\gamma^2\right)-4\int_{\gamma}^{1}g\cos^{-1}\sqrt{\frac{g^2\cos^2\Theta}{1-g^2\sin^2\Theta}}\,dg\right]
\end{aligned}
\tag{3.2.51}
$$

ここで,

$$\phi_s = \cos^{-1}\left(\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \tag{3.2.52a}$$

$$\gamma = \frac{\cos\Delta}{\sin\Theta} \tag{3.2.52b}$$

式 (3.2.51) に含まれる積分はガウスの求積法などで数値的に求める。水平面に対する放射照度投影因子は (3.2.48) と (3.2.51) の和である。

$$\overline{\upsilon}(\Theta,\Delta) = \overline{\upsilon}_{\mathrm{a}}(\Theta,\Delta) + \overline{\upsilon}_{\mathrm{b}}(\Theta,\Delta) \tag{3.2.53}$$

3) 射出方向が上向きと下向きの両方をとる場合２

$\Delta \geq \pi - |\pi/2 - \Theta|$ ($\cos\Delta \leq -\sin\Theta$) の場合である。全球で積分したもの (2π) から (3.2.46) と相似なものを引けばよい。

$$\begin{aligned}
\overline{\upsilon}(\Theta,\Delta) &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}|\cos\theta|d\cos\theta d\phi - \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{\cos\Delta}|\cos\theta|d\cos\hat{\theta}d\hat{\phi} \\
&= 2\pi - 2\int_0^{\pi}\int_{-\cos\Delta}^{1}|\cos\theta|d\cos\hat{\theta}d\hat{\phi} \\
&= 2\pi - 2\int_{-\cos\Delta}^{1}\int_0^{\pi}\left|\sin\Theta\sin\hat{\theta}\cos\hat{\phi} - \cos\Theta\cos\hat{\theta}\right|d\hat{\phi}d\cos\hat{\theta} \\
&= 2\pi\left[1 - |\cos\Theta|\int_{-\cos\Delta}^{1}\cos\hat{\theta}d\cos\hat{\theta}\right] \\
&= 2\pi - \pi|\cos\Theta|\sin^2\Delta
\end{aligned} \tag{3.2.54}$$

計算例

太陽天頂角 0, 30, 60, 90 度のそれぞれについて Δ の関数として計算した水平面に対する放射照度投影因子をプロットした結果を示す（図 3.2.3)。求積点 4 つでは精度が充分ではない。16 点以上とれば高精度である。図には(3.2.43) に出てくる $\overline{\upsilon}(\Theta,\Delta)/\upsilon(\Delta)$ の因子をプロットしたものも示す。

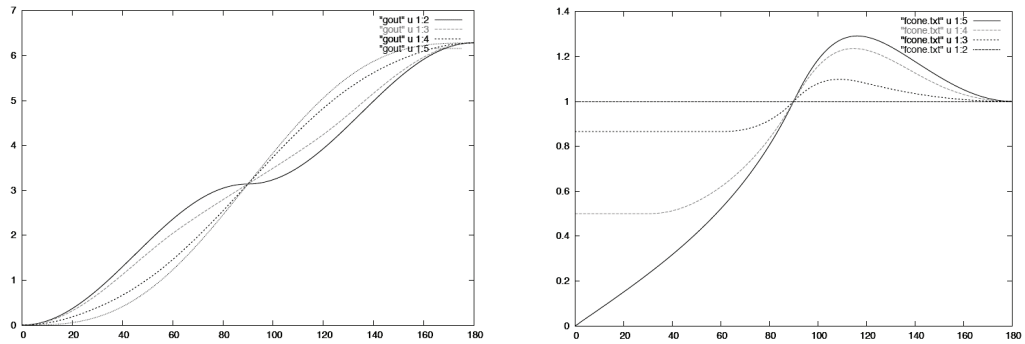


図 3.2.3 太陽天頂角 0, 30, 60, 90 度のそれぞれについて横軸 Δ の関数としてプロットした水平面に対する放射照度投影因子(左), 同じく $\bar{\upsilon}(\Theta,\Delta)/\upsilon(\Delta)$ の因子（右）

f. 射出方向の決定：棄却法

射出方向は棄却法を使えば非常に簡単に決定できる。まず射出領域内で均一に分布する方向を選ぶ。水平面に対する放射照度は天頂角の余弦成分に依存するから，棄却法によってその依存性を考慮する（水平に近い方向が高い確率で棄却される）。まず $\hat{\theta},\hat{\phi}$ を射出領域内で等方的に決める。

$$\frac{\int_0^{2\pi} d\hat{\phi}\int_{\cos\hat{\theta}}^{1} d\cos\hat{\theta}}{\int_0^{2\pi} d\hat{\phi}\int_{\cos\Delta}^{1} d\cos\hat{\theta}} = \rho_{\hat{\theta}} \tag{3.2.55}$$

$$\therefore \cos\hat{\theta} = 1-\rho_{\hat{\theta}}(1-\cos\Delta) \tag{3.2.56a}$$

$$\therefore \sin\hat{\theta} = \sqrt{\rho_{\hat{\theta}}(1-\cos\Delta)\left[2-\rho_{\hat{\theta}}(1-\cos\Delta)\right]} \tag{3.2.56b}$$

ここで注意すべきは Δ が非常に小さいときのため 1 − cosΔ の値を高精度に与えなければならないことである。また,

$$\hat{\phi} = 2\pi\rho_{\hat{\phi}} \tag{3.2.57}$$

である。しかし，極座標法（Appendix A6）を用いて $\rho_{\hat{\theta}},\cos\hat{\phi},\sin\hat{\phi}$ を同時に決めてしまう方がより強力である。

射出方向 $\mathbf{\Omega} = (\theta, \phi)$ は方向 $\mathbf{\Omega}_0 = (\Theta, \Phi)$ を $\hat{\theta},\hat{\phi}$ だけ回転させた方向であるので, 大気中

での散乱と同じ式で求められる。つまり，

$$\mathbf{\Omega} = \left(u_x, u_y, u_z\right)^{\mathrm{T}}, \mathbf{\Omega}_0 = \left(u_{0x}, u_{0y}, u_{0z}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3.2.58}$$

と置くと，

$$\mathbf{\Omega} = \cos\hat{\theta}\,\mathbf{\Omega}_0 + \sin\hat{\theta}\left[\cos\hat{\phi}\begin{pmatrix} u_{0x}u_{0z}\Big/\sqrt{u_{0x}^2+u_{0y}^2} \\ u_{0y}u_{0z}\Big/\sqrt{u_{0x}^2+u_{0y}^2} \\ -\sqrt{u_{0x}^2+u_{0y}^2} \end{pmatrix} + \sin\hat{\phi}\begin{pmatrix} -u_{0y}\Big/\sqrt{u_{0x}^2+u_{0y}^2} \\ u_{0x}\Big/\sqrt{u_{0x}^2+u_{0y}^2} \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{3.2.59}$$

である。ただし，$u_{0x}^2 + u_{0y}^2 = 1 - u_{0z}^2 \approx 0$ のときは，よりシンプルに

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{sign}\left(u_{0z}\right)\begin{pmatrix} \sin\hat{\theta}\cos\hat{\phi} \\ \sin\hat{\theta}\sin\hat{\phi} \\ \cos\hat{\theta} \end{pmatrix} \tag{3.2.60}$$

で計算できる。sign() は正負の符号をとる関数である。

実際は (3.2.59) の z 成分のみをまず求める。

$$\cos\theta = u_z = \cos\hat{\theta}\,u_{0z} - \sin\hat{\theta}\cos\hat{\phi}\sqrt{u_{0x}^2+u_{0y}^2} \tag{3.2.61}$$

次に角度分布の $\cos\theta$ 依存性を考慮して，棄却法を用いる。

$$\begin{cases} \text{If } \rho < \left|\cos\theta\right|/C_{\max}, \text{ finish.} \\ \text{If } \rho \geq \left|\cos\theta\right|/C_{\max}, \text{ rejection.} \end{cases} \tag{3.2.62}$$

を判断する。ここで $C_{\max}$ は，

$$C_{\max} = \begin{cases} 1 & \text{if } \left|\cos\Theta\right| > \cos\Delta \\ \max\left[\left|\cos(\Theta-\Delta)\right|, \left|\cos(\Theta+\Delta)\right|\right] & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.2.63}$$

である。式 (3.2.62) で「棄却」の場合はもう一度 (3.2.56–57, 3.2.61) によって方向を決める。一回のサイクルで棄却される確率は 1/2 以下である。よって平均すると，最悪の場

合でも 2 サイクルで方向が決定する。結局棄却法を使うと非常に簡単にしかも高速に方向を決めることが出来る。

3.3 レイトレーシング

レイトレーシング法（光線追跡法）とは，光の進行経路を追跡することで３次元空間を可視化する手法である。３次元モンテカルロ放射伝達計算では，図 3.3.1 のようにレイトレーシングで，３次元空間上の任意の位置に配置したモデル光子と，同じく空間上に配置した複数の幾何オブジェクトの中で最短距離の交差位置の探査を頻繁に行う場合が出てくる。ここでは，モデル光子と代表的なオブジェクト（平行平面層，直方体，円錐，円柱，回転楕円体）及び起伏形状のある地表面との交差位置の計算方法について述べる。

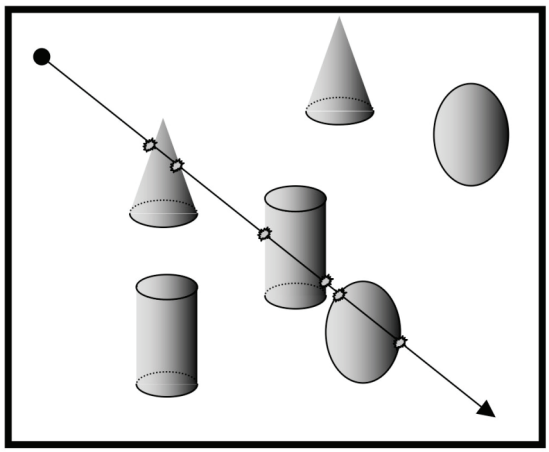


図 3.3.1 モデル光子と複数のオブジェクトとの関係

3.3.1 モデル光子とオブジェクトの交差

直方体や円錐，円柱，回転楕円体とモデル光子の関係には図 3.3.2 に示すような３つの場合が考えられる。まず，A のようにオブジェクトとモデル光子が交点を持たない場合がある。また, B のようにモデル光子とオブジェクトが２つの交点を持つ場合がある。ただし，モデル光子がオブジェクトの接線となる場合には交点が１つになる。更に C のように，モデル光子の出発点がオブジェクト内部にある場合には，一つの交点を持つことになる。交点計算アルゴリズムでは，以下の手順で交点を探索することになる。

<u>モデル光子の始点がオブジェクトの外部にある場合</u>

i) モデル光子の進行方向を示す直線と各オブジェクトが交点を持つか否かの判別

ii) 各オブジェクトの交点を抽出し，その中から最適な交点候補を抽出（図 3.3.2 の B の b1）

iii) 各オブジェクトの交点候補から最短距離の交点候補を決定

<u>モデル光子の始点がオブジェクトの内部にある場合</u>

i) モデル光子を表す直線と当該オブジェクトとの交点を抽出

ii) 交点の中で，モデル光子ベクトルの方向に沿った交点を抽出(図 3.3.2 の B の C2)

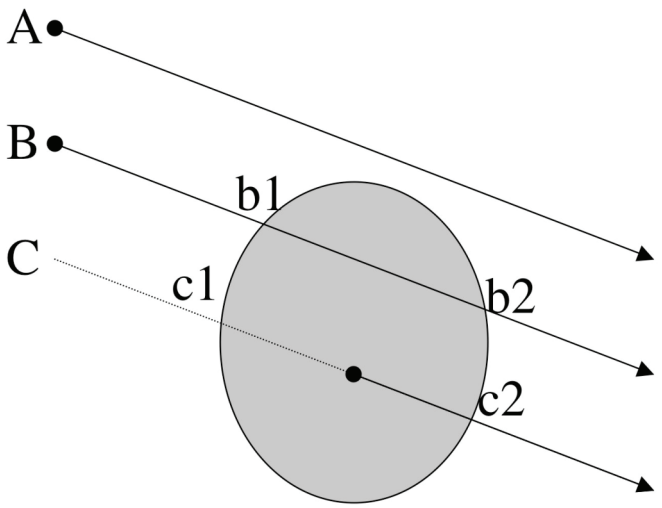


図 3.3.2 モデル光子とオブジェクトの交差。1 :オブジェクトとモデル光子の交差なし。2：オブジェクトとモデル光子が二つの交差を持つ。3：オブジェクトの内部にモデル光子が存在する場合，一つの交点を持つ。

3.3.2 三次元空間におけるオブジェクトとモデル光子の関係

a. モデル光子の方程式

点 $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り単位方向ベクトル $\mathbf{\Omega}(v_x, v_y, v_z)$ を持つモデル光子の方程式はパラメータ t を用いて以下のように表せる。

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{\Omega} \quad \text{(ベクトル表示)} \tag{3.3.1}$$

また各成分で表すと以下のようになる。

$$x = x_0 + tv_x \tag{3.3.2a}$$
$$y = y_0 + tv_y \tag{3.3.2b}$$
$$z = z_0 + tv_z \tag{3.3.2c}$$

b. 直方体とモデル光子の関係

直方体は以下の６つの平面方程式で記述できる。

$$x = x_1;\ x = x_1 + r_x \tag{3.3.3a}$$
$$y = y_1;\ y = y_1 + r_y \tag{3.3.3b}$$
$$z = z_1;\ z = z_1 + r_z \tag{3.3.3c}$$

ここで，(3.3.3a)の平面におけるモデル光子の交点を求める。(3.3.3a)を(3.3.2a)に代入すると，

$$t = (x_1 - x_0) / v_x;\ t = (x_1 + r_x - x_0) / v_x \tag{3.3.4}$$

となる。(3.3.4)で求めたパラメータ t を(3.3.2b)と(3.3.2c)に代入すると，

$$y = y_0 + v_y (x_1 - x_0) / v_x;\ y = y_0 + v_y (x_1 + rx - x_0) / v_x \tag{3.3.5}$$
$$z = z_0 + v_z (x_1 - x_0) / v_x;\ z = z_0 + v_z (x_1 + rx - x_0) / v_x \tag{3.3.6}$$

となり, 交点候補の座標が求まる。これらが, 直方体の表面部分で交点となるためには,

$$y_1 \le y \le y_1 + r_y,\ z_1 \le z \le z_1 + r_z \tag{3.3.7}$$

を満たす必要がある。この条件を満たす点が，モデル光子と直方体との交点である。さらに，モデル光子の始点が直方体の内部にある場合,

$$t \ge 0 \tag{3.3.8}$$

の条件を満たす交点がモデル光子と直方体表面との交点である。y, z 平面(3.3.3b), (3.3.3c)についても同様に計算が可能である。

c. 平行平面層とモデル光子の関係

放射伝達計算では，z 軸に垂直な無限に続く平行平面層内のレイトレースを有限の計算領域で行う場合がある。この場合には，領域外に出たモデル光子は図 3.3.3 のように周期的境界条件を用いてモデル光子の射出した面の反対側の面から入射させてレイトレースを続けることになる。この計算は，直方体と交点との関係で利用した平面とモデル光子の交点計算を用いることで計算可能である。

層の上端から入射したモデル光子が層の下端 $z=z_1$ で交点 (x', y') を持つ場合，モデル

光子と $z=z_1$ の平面との交点計算によって (x', y') が求まる。(x', y') は, 直方体の場合と同様にして求めることができる。つまり， $z=z_1$ を (3.3.2c)に代入すると

$$t = (z_1 - z_0) / v_z \tag{3.3.9}$$

が得られるから，t を(3.3.2a), (3.3.2b)に代入すると

$$x' = x_0 + tv_x \tag{3.3.10a}$$
$$y' = y_0 + tv_y \tag{3.3.10b}$$

となる。このとき, (x', y') の座標が計算領域外に存在する場合がある。今, 境域が $[0, x_d]$, $[0, y_d]$ の範囲であるとき，以下の計算式を用いることで周期的境界条件を満たす(x, y)を求めることができる。

v_x が正のとき,

$$x = x' - \mathrm{integer}(x' / x_d) \times x_d \tag{3.3.11a}$$

v_x が負のとき,

$$x = x' - [\mathrm{integer}(x' / x_d) - 1] \times x_d \tag{3.3.11b}$$

ここで，integer は小数部分を切り捨てる演算を示す。y の場合も同様にして求めることができる。

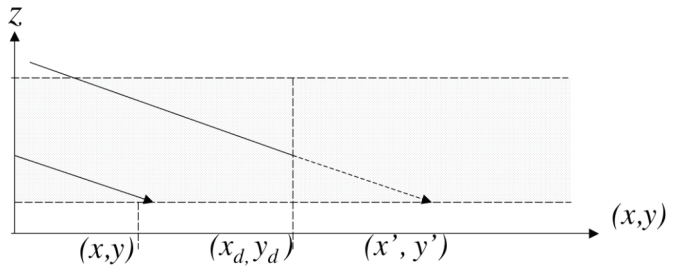


図 3.3.3 平行平面層とモデル光子の関係

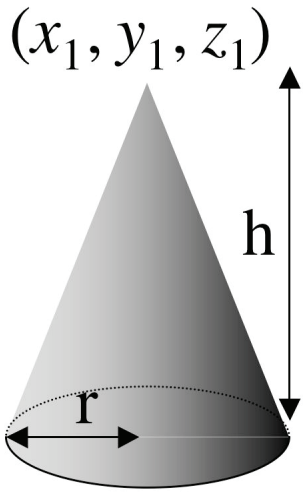


図 3.3.4　円錐の各パラメータの関係

***d.* 円錐**

円錐曲面の方程式は以下のように表せる。

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = c^2 (z - z_1)^2 \text{ (円錐側面)} \tag{3.3.12}$$

$$z = z_1;\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < r^2 \text{ （円錐底面）} \tag{3.3.13}$$

ただし，ここで$(x_1,\ y_1,\ z_1)$は円錐の頂点の座標である。また，各パラメータの関係を図3.3.4 に示した。(3.3.2)のモデル光子の方程式を(3.3.12)に代入して t に関してまとめると，

$$\begin{aligned}&(v_x{}^2 + v_y{}^2 - c^2 v_z{}^2)t^2 + 2\{v_x(x_0 - x_1) + v_y(y_0 - y_1) - c^2 v_z(z_0 - z_1)\}t \\ &+ \{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 - c^2(z_0 - \mathrm{z}_1)^2\} = 0\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

ここで，t に関して第一項を A，第二項を B，第三項を C とすると，判別式

$$D = B^2 - 4AC \tag{3.3.15}$$

において $D \geq 0$ の時，モデル光子は円錐の側面と交点を持つ。ここで，t は解の公式より

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{A} \tag{3.3.16}$$

であるから，この t を(3.3.2)に代入することにより，交点候補が決定できる。但し，実際の円錐と交点を持つ点は

$$z_1 - h \le z \le z_1 \tag{3.3.17}$$

を満たす点に限られる。

底面との交点は, 底面を含む平面 $z = z_1 - h$ と直線との交点の中で, (3.3.13)を満たす点である。平面とモデル光子の交点は，面と直線の交点計算と同様にして求めることができる。さらに，モデル光子の射出地点が円錐の内部にある場合，（3.3.8）の条件を満たす交点がモデル光子と円錐との交点である。

e. 円柱

図 3.3.5 に示すような円柱の側面及び上面・底面の方程式はそれぞれ以下のように表せる。

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 ;\ z_2 \le z \le z_1 \text{ (円柱側面)} \tag{3.3.18}$$

$$z = z_1;\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < r^2;\ \ z = z_2;\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < r^2 \text{（円柱上面・底面）} \tag{3.3.19}$$

ただし，ここで(x_1, y_1, z_1)，(x_1, y_1, z_2)は円柱の上面・底面の中心点の座標である。モデル光子の式(3.3.2)を(3.3.18)に代入して t についてまとめると

$$(v_x^2 + v_y^2)t^2 + 2\{v_x(x_0 - x_1) + v_y(y_0 - y_1)\}t + \{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 - r^2\} = 0 \tag{3.3.20}$$

ここで，円錐の場合と同様に t に関して第一項を A, 第二項を B，第三項を C とすると判別式(3.3.15)において $D \ge 0$ の時，モデル光子は円柱の側面と交点を持つ。ここで，t は解の公式(3.3.16)より求まるから，この t を(3.3.2)に代入することにより，交点候補が決定できる。但し，実際の円柱と交点を持つ点は

$$z_2 \le z \le z_1 \tag{3.3.21}$$

を満たす点に限られる。

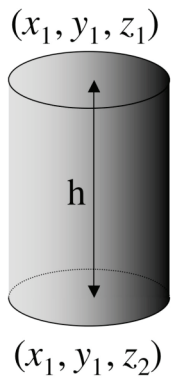


図 3.3.5　円柱の各パラメータの関係

上面・底面との交点は，上面及び底面を含む平面 $z = z_1$; $z = z_2$ とモデル光子との交点の中で，(3.3.19)を満たす点である。平面とモデル光子の交点は，面と直線の交点計算で求めることができる。

モデル光子の射出地点が円柱の内部にある場合, (3.3.8)の条件を満たす交点がモデル光子と円柱との交点である。

f. 回転楕円体

楕円体が x-y 平面上で円形状である場合（回転楕円体）を考える。回転楕円体の方程式は，以下のように表せる。

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{a^2}+\frac{(z-z_1)^2}{b^2}=1 \tag{3.3.22}$$

ここで，(x_1, y_1, z_1) は楕円体の中心の座標である。(3.3.2)を (3.3.22)に代入して t に関してまとめると，

$$\begin{aligned}&(b^2v_x{}^2+b^2v_y{}^2+a^2v_z{}^2)t^2+\{2(x_0v_xb^2-x_1v_xb^2+y_0v_yb^2-y_1v_yb^2+z_0v_za^2-z_1v_za^2)t\\&+b^2(x_0-x_1)^2+b^2(y_0-y_1)^2+a^2(z_0-z_1)^2-a^2b^2=0\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

ここで，円錐の場合と同様に t に関して第一項を A,第二項を B, 第三項を C とすると判別式(3.3.15)において $D \geq 0$ の時，モデル光子は回転楕円体と交点を持つ。t は解の公式(3.3.16)より求まるから, この t を(3.3.2)に代入することにより, 交点候補が決定できる。

さらに，モデル光子の射出地点が回転楕円体内部にある場合，（3.3.8）の条件を満たす交点がモデル光子と円柱との交点である。

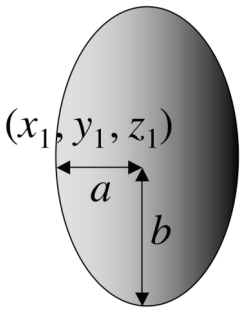


図 3.3.6　円柱の各パラメータの関係

3.3.3　起伏形状のある地表面とモデル光子の関係

モデル光子が地表面に入射する場合，地表面とモデル光子の交点計算を行う必要がある。地表面を z 軸に垂直な平面とした場合, 交点は(3.3.2–6)の手順で計算が可能である。しかし，地表面の起伏を考慮した場合，土地の傾斜面とモデル光子との交点を探索する必要がある。ここでは, 地表面の起伏データとして, デジタル標高モデル(Digital elevation model, DEM)を利用することを想定し，地表面の標高情報は図 3.3.7（上）のような正方形のグリッドの頂点毎に与えられるものとする。さらに，地表面の任意の点(x,y)の標高 z は，(x, y)を囲む最近接の 4 点の座標からバイリニア法で補間する。

バイリニア法を用いると，最近接の 4 点から任意の点(x,y)の標高 z は以下のように表せる。

$$z = \frac{(y_2 - y)z_a - (y_1 - y)z_b}{(y_2 - y_1)} \tag{3.3.24}$$

ここで，z_a, z_b はそれぞれ

$$z_a = \frac{(x_2 - x)z_1 - (x_1 - x)z_2}{(x_2 - x_1)} \tag{3.3.25}$$

$$z_b = \frac{(x_2 - x)z_4 - (x_1 - x)z_3}{(x_2 - x_1)} \tag{3.3.26}$$

である。これらの関係式((3.3.24)-(3.3.26))が，バイリニア法によって作られる地表面（曲

面）の方程式である。これらの式に(3.3.2)を代入して t についてまとめると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
& v_{xv}(z_1 - z_2 + z_3 - z_4)t^2 \\
& + \left\{ \begin{array}{l} y_0 v_x (z_1 - z_2 + z_3 - z_4) + x_0 v_v (z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \\ -y_2 v_x (z_1 - z_2) - y_1 v_x (z_3 - z_4) \\ -x_2 v_y (z_1 - z_4) - x_1 v_y (-z_2 + z_3) - v_z x_d y_d \end{array} \right\} t \\
& + \left\{ \begin{array}{l} y_0 x_0 (z_1 - z_2 + z_3 - z_4) - y_0 x_2 (z_1 - z_4) - y_0 x_1 (-z_2 + z_3) \\ -x_0 y_2 (z_1 - z_2) - x_0 y_1 (-z_2 + z_3) \\ y_2 x_2 z_1 - y_2 x_1 z_2 + y_1 x_1 z_3 - y_1 x_2 z_4 - z_0 x_d y_d \end{array} \right\}
\end{aligned}
\tag{3.3.27}
$$

ここで，$x_d = (x_2 - x_1)$, $y_d = (y_2 - y_1)$である。

この関係式から解の公式（3.3.16）で t を求め，(3.3.2)に代入して得られた地点が，地表面との交点である。但し，得られた解の x, y はそれぞれ以下の関係を満たす必要がある。

$$x_1 \le x \le x_2;\ y_1 \le y \le y_2 \tag{3.3.28}$$

地表面との交点計算は領域内のすべての正方グリッドとモデル光子の交点を(3.3.27)及び(3.3.28)に基づいて行うことになる。ただし，図 3.3.7（中）のモデル光子の軌跡 A のように，求められた交点の解には，地表面の表側からモデル光子が入射する解と，裏側からモデル光子が入射する解が存在する。この場合，モデル光子の始点との距離が最短の交点は，必ず地表面の表から入射するから単純に最短距離の交点を選択すればよい。

(x, y) 方向に $N \times M$ 個の頂点が存在する場合，その頂点が作る正方形の総数は$(N-1) \times (M-1)$である。従って上記の交点探査アルゴリズムで交点を求めると，グリッド間隔を細かくして詳細な地表面起伏を再現する場合には非常に大きな計算量が必要となる。この場合，簡易的ではあるが以下の方法を用いることで，交点を探査するグリッド数を減少させることができる。

（ア）レイトレーシングを始める前にシミュレーションの前処理としてデジタル標高データの標高の最大値と最小値を求める。

（イ）個々の正方グリッド内のバイリニア曲面とモデル光子との交点を求める前に図 3.3.7（中）のように標高の最大値と最小値が作る z 軸方向に垂直な面とモデル光子の交点を求める。

（ウ）この２点を含む正方グリッドを対角線上の頂点とする領域内のグリッドのみ

で交点計算を行い（図 3.3.7 下），先述の方法で交点の解を求める。

この方法の計算効率は，計算を行う領域のグリッド間の距離と，標高の最大/最小差の比によって決まる。標高差が小さくグリッド間の距離が長い場合，計算効率がかなり改善される。また，モデル光子の入射天頂角が小さいほど高速である。

さらに効率の改善のためには以降に述べる空間分割法と境界ボリューム法の利用が有効である。

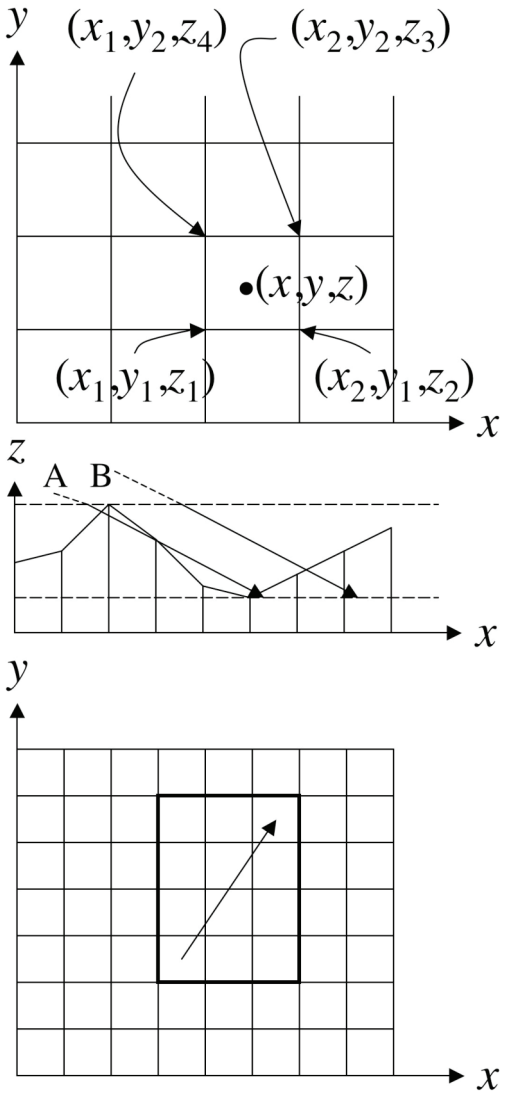


図 3.3.7　地表面とモデル光子の交点 上：任意の点とその点を囲む最近接の４点の関係 中：標高データとモデル光子の関係 下：標高最大値・最小値が作る z 軸に垂直な面とのモデル光子の交点を含む交点探査領域

3.3.4 空間分割法

空間分割法 (space subdivision method) は，三次元空間をあらかじめ細かなセルに分割し，どのセルにどのオブジェクトが含まれているかを記憶しておく方法である（荒屋，2003）。光線とオブジェクトの交差判定の回数を減らすことができるため，オブジェクトの数が多いときに，高速化を期待できる。それぞれのセルをさらに細かいサブセルに分割することによって階層構造を構築するとさらに効率的である。

例えば前述の起伏形状を扱う場合，各地形ピクセルを含むようにモデル領域を縦に空間分割し，常に光子を含むボクセル（直方体）を移動しながらモデル光子を追跡する方法が考えられる。モデル光子がボクセル境界まで飛ぶのか，それともボクセル内部の地表面と交差するのかを逐次判定してモデル光子を追跡する。直方体との交差判定は比較的簡単であり（3.3.2 小節），またこの場合各直方体に含まれる地表面の曲面要素は一個であるため，高速化が期待できる。

3.3.5 境界ボリューム法

境界ボリューム法は，複雑な形状のオブジェクト全体を包み込む単純な仮想オブジェクト（境界ボリューム）を考える方法である（荒屋，2003）。まずはこの境界ボリュームとの交差判定を行い，交差していなければ内部の複雑なオブジェクト（一個とは限らない）との交差判定を省略できる。境界ボリュームと交差していれば，内部のオブジェクトとも交差している可能性があるので，その複雑なオブジェクトとの交差判定を行う。つまり，「交差しない」場合を高速に判定することによって負荷の高い計算が省略できる。この方法もやはり階層構造を利用することができる。

例として，前述の起伏形状を扱う場合，モデル光子があるピクセル内の地表面と交差するのかどうかを高速に判定するのに利用できる。例えば，その地表面要素を含む境界ボリュームとして直方体を考える。この直方体の z 座標の境界は，ピクセル要素の４つの頂点の z 座標の最小値と最大値によって決まる。モデル光子がこの直方体と交差しなければ地表面要素と交差することもないので地表面要素との厳密な交差判定は不要になる。前述の空間分割法と組み合わせて使うとより強力である。

別な例として，3.3.2 小節で述べた円錐や回転楕円体との交差判定をする場合，それらのオブジェクトを包有し鉛直方向に無限に延びる円柱との交差判定を最初に行うと高速化できる。この場合は z 座標を考える必要がなく，(x, y) 二次元の問題となる。交差判定は，通常の円柱の側面との交差のみ考えれば良いので既に述べた通りであるが以下のように簡略化できる。今，光子の位置を $\mathbf{r} = (x, y)^{\mathrm{T}}$，光線の進行方向の単位ベクトルを $\mathbf{\Omega} = (u_x, u_y)^{\mathrm{T}}$，円柱断面の中心点を $\mathbf{c} = (p, q)^{\mathrm{T}}$，円柱の半径を R とすると，図 3.3.8 のよう

な位置関係となる。このとき，光線と円柱が交差する条件は，

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{|\mathbf{c}-\mathbf{r}|^2 - R^2}}{|\mathbf{c}-\mathbf{r}|} \geq \mathbf{\Omega}\cdot\left(\frac{\mathbf{c}-\mathbf{r}}{|\mathbf{c}-\mathbf{r}|}\right) \tag{3.3.29}$$

である。各ベクトルの (x, y) 成分について整理すると，

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(p-x)^2+(q-y)^2-R^2} \geq (p-x)u_x+(q-y)u_y \\
&\therefore (p-x)^2+(q-y)^2 \geq R^2+(p-x)u_x+(q-y)u_y
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

となる。(3.3.30) 式による交差判定は前述の 3.3.2 小節で述べた円錐や回転楕円体との交差判定よりも演算回数が少ない。一本の樹木が複数のオブジェクトの組み合わせで表現されている場合，そららのオブジェクト全体を含む円柱を考えると特に効率的である。

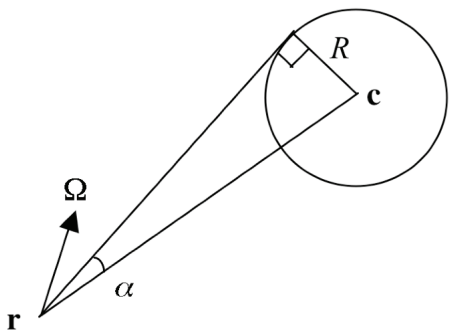


図 3.3.8 円柱と光線の位置関係

3.4 衝突過程

光子は媒体中の粒子によって散乱または吸収を受ける。この過程は光子と粒子との「衝突」として考えることができ，簡単な確率過程で説明できる。しかし，衝突点をどう決めるのか，吸収をどう扱うのか，光子のウェイトはどうなるのか，複数の種類の媒体が混合しているときはどう扱うかなどに関しては，モデル化の方法は一意ではない。この節ではこれらのトピックについて議論する。

3.4.1 衝突確率と衝突点の決定

a. 消散係数とパス長

媒体中では散乱・吸収によって光の強度が減衰する。均質な媒体中で光源から射出された直達光の距離 s における強度は Lambert-Beer 則から，

$$I = I_0 \exp(-\beta_e s) \tag{3.4.1}$$

となる。ここで，β_e は体積消散係数（単位体積当たりの消散断面積）(m^{-1})であり，次式のように光子の平均自由行程（mean free pathlength, MFP）と密接に結びついている。

$$\mathrm{MFP} = 1/\beta_e \tag{3.4.2}$$

一般には不均質媒体を考えると，座標 $\mathbf{r}_0$ から座標 $\mathbf{r}_1$ まで光が進むとき，

$$I = I_0 \, \mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)} \tag{3.4.3}$$

$$\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_1} \beta_e(t) dt; \quad t = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| \tag{3.4.4}$$

が成り立つ。(3.4.4) 右辺の積分は数値的に計算される。τ はパスに沿った光学的厚さ（または光学的距離）である。

b. 衝突率と衝突点のサンプリング

式 (3.4.3) より I/I_0 の比，

$$T(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau} \tag{3.4.5}$$

は「透過率」である。透過率は「光学的距離が τ の位置まで一度も衝突が起きない確率」と解釈することができる。この相反事象の確率，すなわち「光学的距離が τ の位置までの間に一度は衝突が起きる確率」を「衝突率」と呼ぶ。衝突率 C は，

$$C(\tau) = 1 - T(\tau) = 1 - \mathrm{e}^{-\tau} \tag{3.4.6}$$

である。衝突率 C は衝突の累積分布関数であり，その微分が衝突の確率密度関数 (PDF) である。よって PDF は

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = \mathrm{e}^{-\tau} = T(\tau) \tag{3.4.7}$$

であり，実は透過率に等しいということがわかる。

今, 光学的距離が 0 から無限大の間のランダムな位置で一回の衝突が起きるとすると，サンプリングされる光学的距離は，一様乱数 ρ によって次式で決まる。

$$C(\tau) = \rho;\ T(\tau) = 1 - \rho = \tilde{\rho} \tag{3.4.8a}$$

$$\therefore \tau = -\ln(1-\rho) = -\ln\tilde{\rho} \tag{3.4.8b}$$

となる。$1 - \rho$ はやはり一様乱数であるので ρ に置き換えても良い。こうしてランダムに決めた τ を (3.4.4) に代入して解けば衝突点 $\mathbf{r}_1$ を決定できる。

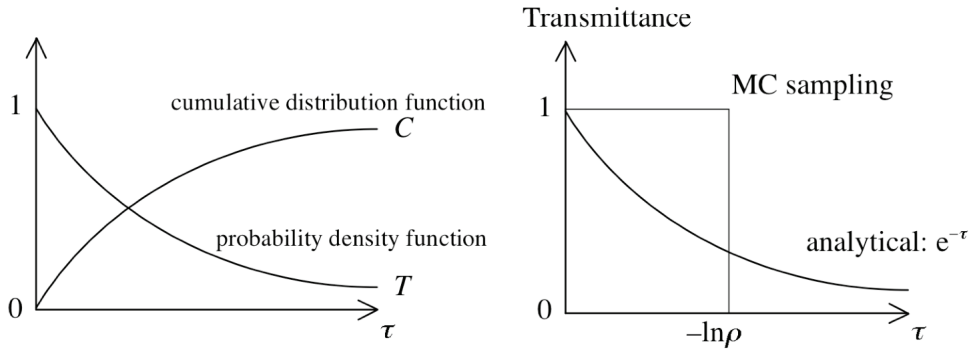


図 3.4.1 光学的距離と衝突率・透過率の関係

c. 衝突点の制限付きサンプリング

光学的距離が τ_1 から τ_2 までの区間で衝突が起きる確率は衝突率 C または透過率 T の差で与えられる。

$$\Delta C(\tau_1,\tau_2) = C(\tau_2) - C(\tau_1) = \mathrm{e}^{-\tau_1} - \mathrm{e}^{-\tau_2} = T(\tau_1) - T(\tau_2) = \Delta T(\tau_1,\tau_2) \tag{3.4.9}$$

この確率は,

$$\begin{aligned}\Delta C(\tau_1,\tau_2) &= \mathrm{e}^{-\tau_1}\left(1-\mathrm{e}^{-(\tau_2-\tau_1)}\right)\\ &= T(\tau_1)C(\tau_2-\tau_1)\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

とも書ける。つまり, τ_1 までの透過率に光学的厚さ $\tau_2 - \tau_1$ の衝突率をかけたものである。

今この区間内の光学的距離 τ の位置までに衝突が起きる確率を考えると，その「制限付き」衝突の累積分布関数は以下の様になる。

$$C'(\tau;\tau_1 \to \tau_2) = \frac{T(\tau_1)C(\tau-\tau_1)}{T(\tau_1)C(\tau_2-\tau_1)} = \frac{C(\tau-\tau_1)}{C(\tau_2-\tau_1)} = \frac{1-\mathrm{e}^{-(\tau-\tau_1)}}{1-\mathrm{e}^{-(\tau_2-\tau_1)}} \tag{3.4.11}$$

この τ_1 から τ_2 までの区間内のランダムな位置で衝突が起きるとすると，その位置までの光学的距離 τ は,

$$C'(\tau;\tau_1 \to \tau_2) = \rho \tag{3.4.12a}$$

$$T(\tau-\tau_1) = 1-\rho C(\tau_2-\tau_1) \tag{3.4.12b}$$

$$\therefore \mathrm{e}^{-(\tau-\tau_1)} = 1-\rho\left(1-\mathrm{e}^{-(\tau_2-\tau_1)}\right) \tag{3.4.12c}$$

によって決まる。仮に

$$\tau_1 = 0, \tau_2 = \infty \tag{3.4.13}$$

ならば，(3.4.8) に同じになる。以上でパスの中の任意の区間内で衝突が起きる確率が与えられ (3.4.10)，さらにその区間内で一回の衝突をサンプリングする場合の衝突点が (3.4.12) によって決まることになる。これを応用すると，任意の区間で加熱率を（強制的に）サンプリングすることができる。上記の位置で吸収が起きる確率は，衝突確率 (3.4.10) と一次散乱 co-albedo の積として与えられる。

$$\Delta C(\tau_1,\tau_2)(1-\omega)=T(\tau_1)C(\tau_2-\tau_1)(1-\omega) \tag{3.4.14}$$

3.4.2 吸収の扱い

光子が粒子によって散乱を受ける過程は衝突として扱うしか方法はない。吸収の扱いには二通りがある。ここでは媒体の光学特性を $\beta_e, \beta_a, \beta_s, \omega, P$ とする。

a. 吸収を衝突過程として扱う場合

吸収と散乱を混合して「衝突」として扱う場合は，座標 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_1$ へ光子が移動したときの透過率を $T(\tau)$ としたとき，

$$\tau=\tau_e=\int_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1}\left[\beta_s(t)+\beta_a(t)\right]dt;\quad t=\left|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\right| \tag{3.4.15}$$

となる（図 3.4.2 参照)。「衝突した」とき，その衝突は散乱または吸収のどちらかである。散乱である確率は

$$\omega=\beta_s/\beta_e \tag{3.4.16}$$

で与えられる。よって散乱後の光子のウェイトは，

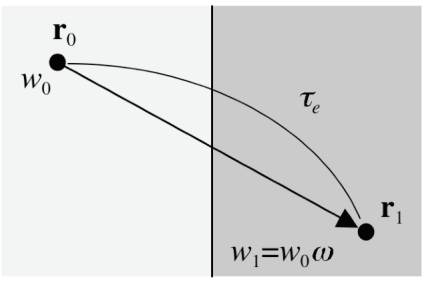


図 3.4.2 衝突の扱いの模式図：吸収を衝突過程として扱う場合

$$w_1 = w_0 \omega \tag{3.4.17}$$

となる。また，吸収（加熱）されるウェイトは，

$$\Delta w = w_0 - w_1 = w_0 (1 - \omega) \tag{3.4.18}$$

で与えられる。このウェイト分の加熱はその衝突点でサンプリングされる。

b. 吸収をパス長から計算する場合

吸収を衝突として扱わない場合は「散乱＝衝突」である。透過関数を $T(\tau)$ としたとき，

$$\tau = \tau_s = \int_{\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_1} \beta_s(t) dt; \quad t = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| \tag{3.4.19}$$

である。均質な吸収係数を持つ媒体中を光子がパス長 l'だけ進んだとき，光子のウェイトは

$$w' = w_0 \, \mathrm{e}^{-\beta_a l'} \tag{3.4.20}$$

となる。この光子のパスの途中で吸収（加熱）されるウェイトは，

$$\Delta w = w' - w_0 = w_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_a l'}\right) \tag{3.4.21}$$

で与えられる。このウェイト分の加熱はどこでサンプリングされるべきか？ もしランダムに選んだ一点でサンプリングするとしたら，その点までのパス長を l_a として，(3.4.12c) を使うと，

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-\beta_a l_a} = 1 - \rho\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_a l'}\right) \\ &\therefore l_a = -\frac{\ln\left[1 - \rho + \rho \, \mathrm{e}^{-\beta_a l'}\right]}{\beta_a} \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

が成り立つ。このようにすると加熱率はモデル光子がボクセルを通過する度にサンプリングされることになる。このような方法は「衝突強制法」の一種である（ここで述べて

いる方法は「吸収強制法」と呼ぶのが適当かもしれない)。

消散係数が非常に小さい媒体で加熱率を計算したい場合，ここで述べた方法の方が前述の衝突に伴って吸収を計算する方法よりも効率的である。ここで述べた方法では吸収の強弱に関係なく光子の通過の度に加熱率をサンプリングできるのに対し，前述の衝突に伴って吸収を計算する方法では消散係数が小さい媒体では衝突が起こりにくく，加熱率のサンプリング頻度が小さい。しかし，スケーリング変換を使った衝突強制法 (Iwabuchi, 2006) などを併用するとどちらの方法でも効率的に同じであることがわかっている。コーディングのしやすさと 4.1 節で述べる最大消散係数 法との併用可能性から著者は前述の吸収を衝突過程として扱う方法を推薦する。

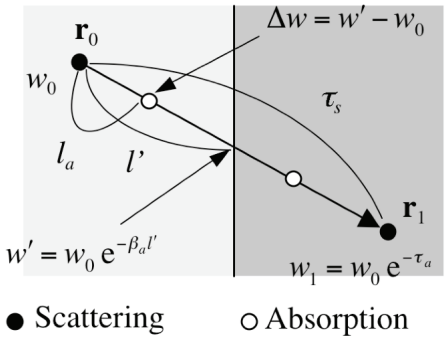


図 3.4.3 衝突の扱いの模式図：吸収をパス長から計算する場合

3.4.3 混合媒体の扱い

現実の大気では，気体によるレーリー散乱，気体吸収，エーロゾルによるミー散乱，雲水・雲氷によるミー散乱，あるいは雨粒・雪・霰などのさらに大きな粒子による散乱が混合している。もっとミクロなスケールで見ると，エーロゾルや凝結粒子は，様々なサイズの粒子の集合であり，その粒径分布は場所によって変化する。森林キャノピーにおいても例えば複数種類の植物の葉が混合している場合や，様々な大きさの葉が混合している媒体として扱わなければいけない場合が想定される。

N 種類の媒体が混合している場合，その混合媒体の光学特性 β_e, β_a, β_s, ω, P は以下のようになる。

$$\beta_e = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\beta}_e(i),\ \beta_a = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\beta}_a(i),\ \beta_s = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\beta}_s(i) \tag{3.4.23}$$

$$\omega = \frac{\beta_s}{\beta_e} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\beta}_s(i)}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\beta}_e(i)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\omega}(i)\tilde{\beta}_e(i)}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\beta}_e(i)} \tag{3.4.24}$$

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\beta}_s(i)\tilde{P}(i)}{\beta_s} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\omega}(i)\tilde{\beta}_e(i)\tilde{P}(i)}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\omega}(i)\tilde{\beta}_e(i)} \tag{3.4.25}$$

ここで，消散係数については

$$\begin{aligned} \beta_e &= \beta_a + \beta_s \\ \tilde{\beta}_e(i) &= \tilde{\beta}_a(i) + \tilde{\beta}_s(i) \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

が成り立つ。この混合媒体中の放射伝達をモデル化する場合，衝突点の決定は各成分の合計である β_e に基づいて行う。

散乱方向を決めるとき，各ボクセルについて混合した場合の P を使うことは通常難しい。理由は位相関数は通常 10000 点以上の角度についての LUT にして扱うので，もし LUT を各ボクセル毎に作成すると巨大なメモリが必要となるからである（大気モデルでのボクセル数は 200 x 200 x 50 もしくはそれ以上！）。そこで，どの成分 i による散乱（または衝突）なのかを乱数によって決めて，その成分の $\tilde{P}(i)$ を使って散乱方向を決定する。このようにすれば必要な位相関数の LUT は各成分について用意すれば良い。実際には粒子の粒径分布がボクセル毎に変化するので，LUT は様々な成分と粒径分布について作成しておいて，各ボクセルの各成分についてどの LUT を参照するかをメモリに保持しておくのが有効である。その場合は $\tilde{P}(i)$ ではなく，$\tilde{P}(m(i))$ を用いることになる（m は位相関数の LUT のインデックス）。衝突（または散乱）する成分が何なのかを決めれば例えば各成分毎に加熱率をサンプリングしたりすることも可能である。

散乱と吸収を共に「衝突」として扱う場合（別な扱いもあり得る [3.4.2 小節]），方向を決めるために使用する位相関数をランダムに選ぶとき，二通りの方法が考えられる。つまり，衝突（散乱＋吸収）の種類を選ぶか，散乱の種類を選ぶかの違いである。どちらも物理的に正しく，バイアスが生じることはない。

a. 衝突の種類を乱数によって決める場合

この場合は衝突したときにまずそれがどの成分 i による衝突なのかを乱数によって決める。成分 i による衝突である確率は，

$$p_{col}(i) = \frac{\tilde{\beta}_e(i)}{\beta_e}, \quad \sum_{i=1}^{N} p_{col}(i) = 1 \tag{3.4.27}$$

で与えられる。それぞれの成分の一次散乱アルベドは異なっているから，散乱後の光子のウェイトは，

$$w' = w\tilde{\omega}(i) \tag{3.4.28}$$

となる。また，この衝突で吸収（加熱）される割合は，

$$\Delta w = w\left(1 - \tilde{\omega}(i)\right) \tag{3.4.29}$$

で与えられる。つまり光子のウェイトや加熱率が衝突する成分 i によって異なる。この方法は成分によって一次散乱アルベドが大きく異なる場合，加熱率や LEM でサンプリングされる放射輝度のノイズが大きくなってしまう。例えば $i = 1$ が気体吸収で $\tilde{\omega}(1) = 0$，$i = 2$ が雲粒による散乱で $\tilde{\omega}(2) = 0.999999$ であるとしよう。サンプリングされる加熱ウェイトは

$$\Delta w = \begin{cases} w & \text{for } i = 1 \\ w \times 10^{-6} & \text{for } i = 2 \end{cases} \tag{3.4.30}$$

となる。今雲粒による散乱が卓越しており，気体吸収はまれにしか起こらない [$\tilde{\beta}_e(1) << \tilde{\beta}_e(2)$] とすれば，普通は雲粒による小さい加熱がサンプリングされているのに，ごくまれにそれよりも 10^6 倍も大きな加熱がサンプリングされることになる。かくて積分した結果は非常にノイズが大きくなってしまう。以上の理由でこの方法は推薦できない。

b. 散乱の種類を乱数によって決める場合

衝突したときにその光子が吸収されずに散乱される確率は単に (3.4.24) の ω で与えられる。散乱後のウェイトは，

$$w' = w\omega \tag{3.4.31}$$

となる。また，この吸収（加熱）される割合は，

$$\Delta w = w(1-\omega) \tag{3.4.32}$$

で与えられる。このようにウェイトをスケーリングし, 加熱率をサンプリングした後で, どの成分による散乱なのかを決める。成分 i による散乱である確率は,

$$p_{sca}(i) = \frac{\tilde{\beta}_s(i)}{\beta_s} = \frac{\tilde{\omega}(i)\tilde{\beta}_e(i)}{\omega\beta_e}, \text{ where } \sum_{i=1}^{N} p_{sca}(i) = 1 \tag{3.4.33}$$

と与えられる。(3.4.27) との違いは消散係数で決めるか散乱係数で決めるかという点である。(3.4.31–32) からわかるようにウェイトやサンプリングされる加熱率は成分によらず一定である。ω はボクセル毎に異なるから各ボクセル毎ではいつもほぼ同じ加熱率やそこから散乱される放射輝度などがサンプリングされることになる。これにより効率的なサンプリング結果が得られる。

3.4.4 ロシアンルーレット法と光子分割法

モデル光子にウェイトを持たせたモデルでは衝突の度にあるいは光子が吸収媒体中を走る過程でウェイトが次第に減少していく。ウェイトが非常に小さいモデル光子を追跡するために計算時間を費やすのは明らかに無駄である。そこでウェイトが小さくなったら「ロシアンルーレット法」(Booth, 1985; Kawrakow and Rogers, 2001) を使ってウェイトを調節するのが有効である。

今ウェイト w が任意の定数 W よりも小さいとき（W は 1 より大きくても可), 乱数を一個発生させて,

$$w' = \begin{cases} 0 & \text{if } \rho_w \geq w/W \\ W & \text{if } \rho_w < w/W \end{cases} \tag{3.4.34}$$

とする。ウェイトが 0 になった場合はそのモデル光子の追跡は終了する。つまり，モデル光子の「生死」がランダムに選択されることになる。生き残る確率は w/W であり, 全体としては,

$$0 \times (1 - w/W) + W \times w/W = w \tag{3.4.35}$$

であり，元のウェイト w が保存されている。以上の方法を「ロシアンルーレット法」という。通常は「w が W よりも十分に小さい」$w < W/2$, という条件で適用するのがよい。ロシアンルーレット法はエネルギーを（平均的に）保存しており，シミュレーションの

どのステップで適用しても良いし，モデル領域内のどの場所で適用してもバイアスは生じない。

同様にモデル光子のウェイトを調節する方法に「光子分割法」がある。これは，一個のモデル光子を任意の N 個に分割し，それぞれのウェイトを例えば，

$$w' = w/N \tag{3.4.36}$$

とする。一般には分割したそれぞれのウェイトを等しく与える必要もない。適用例としては例えば散乱が起きたときに光子分割法を使って複数の方向に散乱させる場合などが考えられる。やはりエネルギーは保存しており，シミュレーションのどのステップで適用しても良いし，モデル領域内のどの場所で適用してもバイアスは生じない。

上記のどちらの方法もウェイトと光子の数 (population) を調節する方法である。表にすると，表 3.4.1 のようになる。ではどういうときにこれらを使用するのがよいのか？答えはサンプリングしようとしている放射量に対する「重要度」に応じて使用するということである。サンプリング数を増やしたい場面で光子分割法を使い，逆に減らしたい場面であるいはあまり重要ではない光子群をロシアンルーレット法で減らす。例えば高次散乱があまり重要ではないのであれば，ある程度以上散乱した時点で大きな W を設定してロシアンルーレット法を適用すれば良い。大気やキャノピーの放射モデルに関して言えば光子分割法は必要性が明らかではなく，モデルコードを複雑にするだけであるので推薦できない。

概してシミュレーションの中でウェイトが大きくばらつくのはサンプリングノイズを増やすことになるので，ロシアンルーレットで設定するウェイト W はおよそ 0.1 から 5 の範囲に設定するのが妥当である。

表 3.4.1　ロシアンルーレット法と光子分割法におけるウェイトとモデル光子の頻度の変化

	Russian roulette	**Photon splitting**
Weight	increase (if survived)	decrease
Population	decrease	increase

3.5 散乱

光子が大気及び植生内に入射すると大気分子，雲，エーロゾル，葉面，幹等の物質と相互作用（散乱）する。散乱現象は，光と散乱媒体との電磁気学的な相互作用によって引き起こされる。ここでは，代表的な散乱媒体として大気分子，エーロゾル・雲及び葉面を取り上げ，光の散乱過程の基本的な概念をまとめた上で，モンテカルロ法における散乱現象のモデル化について述べる。

3.5.1 散乱過程

ここでは，大気の散乱については主に Hansen and Travis, (1974), 柴田 (1999)，葉面の散乱については Shultis and Myneni (1988)を参考にして記述している。

a. 大気における散乱過程

球状で均質な電磁気学的性質(複素屈折率もしくは複素誘電率)を持つ粒子における散乱はミー散乱理論で解析的に導出できる。ミー理論の導出過程は，三次元の Maxwell 方程式（二階の偏微分方程式）で電場・磁場ベクトルの解を求める過程であり，その解は特殊関数で記述される。ミー理論によって計算される散乱強度の分布は，複素屈折率とサイズパラメータ x に依存する。ミー散乱による電場・磁場ベクトルの導出は様々なテキストで取り扱っているため，ここでは省略する。

なお，x は入射波長に対する散乱物質の円周の比であり，以下のように定義する。

$$x = 2\pi a / \lambda \tag{3.5.1}$$

この値を用いると x の大きさの違いによって散乱過程を３つの主な散乱に分けて考えることができる。$x << 1$ の場合は大気分子による散乱（レイリー散乱）に相当し，$x \sim 1$ の場合エーロゾル・雲粒子の散乱に相当する。また，$x >> 1$ の場合には，光の波長に比較して十分に大きな物質（固体惑星表層の土壌粒子など）における散乱に相当し，幾何光学的な近似が成り立つ。

図 3.5.1 のように光の進行方向を z 軸方向にとり，入射光の電場ベクトル（E_0）と散乱光の電場ベクトル（E）と散乱角のなす面に平行な成分(添え字 p)と垂直な成分(添え字 s)に分けて考える。また，入射光が平面波として入射し，散乱光については散乱物質から十分に離れた場所に寄与する成分のみを取り扱う。このとき，散乱光の電場ベクトルは一般的に散乱行列 **S** を用いて下記のよう表せる。

$$\begin{pmatrix} E_p \\ E_s \end{pmatrix} = \frac{\exp(-ikr)}{ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0p} \\ E_{0s} \end{pmatrix} \tag{3.5.2}$$

ここで，k, r はそれぞれ入射光の波数及び散乱地点からの距離である。また，入射光に対する散乱の割合を表す単散乱アルベドωは以下のように定義される。

$$\omega = \frac{\beta_s}{\beta_e} \tag{3.5.3}$$

ここで，β_s とβ_e はそれぞれ単位体積当たりの散乱係数(m^{-1})と消散係数(m^{-1})である。

大気分子による散乱（レイリー散乱）

大気分子のイオン半径は大まかに~0.1nm のオーダーであり，光の波長（~1μm）に比較して十分に小さい。この場合，大気分子の一分子付近に入射する電磁波の電場ベクトルは空間的に一様と見なせるため，電磁波によって誘起される分子の電場は双極子場となる。レイリー散乱による散乱光は時間的に変動する入射光の電場ベクトルに呼応した双極子場の振動による輻射である。分子の分極率をα_pで表すと，レイリー散乱に対応する散乱行列 **S** は以下のように書き表せる。

$$S = \frac{ik^3\alpha_p}{4\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5.4}$$

ここで，入射光のエネルギーに対する任意の微少立体角方向($d\Omega$)の散乱光の割合である微分散乱断面積は以下の様になる。

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = r^2 \frac{|E_p|^2 + |E_s|^2}{|E_{0p}|^2 + |E_{0s}|^2} = \left(\frac{\alpha_p k^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1+\cos^2\Theta}{2} \tag{3.5.5}$$

ここでは，入射光を太陽光として E_{0p} と E_{0s} が等しいとして計算した。散乱方向の強度分布関数である位相関数は，下記のように微分散乱断面積(3.5.5)を全散乱断面積で規格化した関数として表せる。

$$p(\Theta) = \frac{4\pi}{\sigma_s}\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = \frac{3}{4}\left(1+\cos^2\Theta\right) \tag{3.5.6}$$

なお，位相関数は以下の規格化条件を満たす。

$$\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} p(\Theta)d\Omega = 1 \tag{3.5.7}$$

レイリー散乱の場合，すべての分子の位相関数は等しいので，分子の集合体における位相関数 P も(3.5.6)式に等しい。また，レイリー散乱の場合には完全弾性散乱であり消散係数と散乱係数が等しく，単散乱アルベドは 1 である。

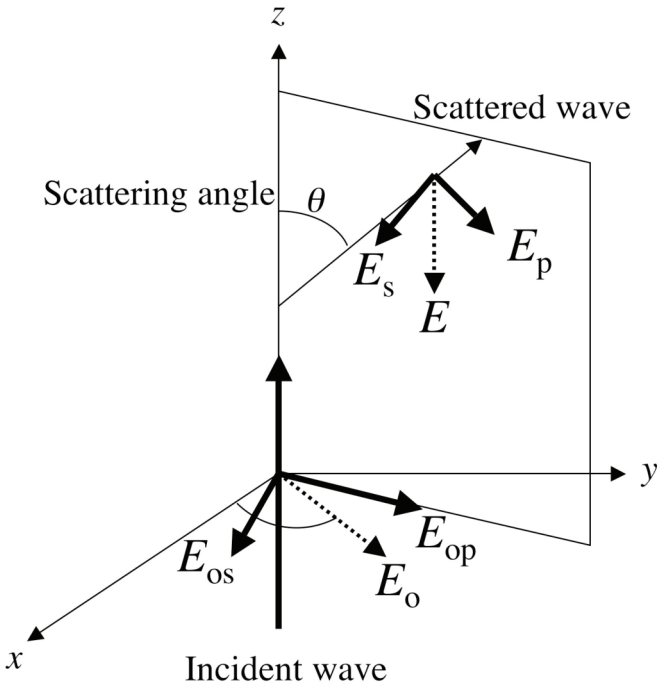


図 3.5.1　入射波と散乱波の電場ベクトルの関係

<u>*エーロゾル・雲粒子による散乱*</u>

エーロゾル・雲粒子の場合，散乱行列 **S** の成分 S_1, S_2 は以下のように書き表せる。

$$S_1(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[a_n(x)\frac{P_n^1(\cos\Theta)}{\sin\Theta} + b_n(x)\frac{dP_n^1(\cos\Theta)}{d\Theta}\right] \tag{3.5.8}$$

$$S_2(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[b_n(x)\frac{P_n^1(\cos\Theta)}{\sin\Theta} + a_n(x)\frac{dP_n^1(\cos\Theta)}{d\Theta}\right] \tag{3.5.9}$$

ここで，P_n^1 はルジャンドル陪関数であり，係数 a_n, b_n はサイズパラメータ x の関数であ

る。微分散乱断面積は，入射波を太陽光として E_{0p} と E_{0s} が等しいとして計算すると，

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = r^2 \frac{\left|E_p\right|^2 + \left|E_s\right|^2}{\left|E_{0p}\right|^2 + \left|E_{0s}\right|^2} = \frac{\left|S_1(\Theta)\right|^2 + \left|S_2(\Theta)\right|^2}{2k^2} \tag{3.5.10}$$

となる。よって一粒子あたりの位相関数は以下のようになる。

$$p(\Theta) = \frac{4\pi}{\sigma_s}\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\sigma_s k^2}\left(\left|S_1(\Theta)\right|^2 + \left|S_2(\Theta)\right|^2\right) \tag{3.5.11}$$

多数の異なる粒子サイズを持つ粒子の集合体の散乱による位相関数 P は，粒子半径 a 毎の粒子の数密度 $n(a)$とその散乱断面積$\sigma_s(a)$の積の重みを付け平均によって以下のように計算できる。

$$P(\Theta) = \frac{1}{\beta_s}\int_{a_{min}}^{a_{max}} p(\Theta)\sigma_s(a)n(a)da \tag{3.5.12}$$

ここで，散乱係数β_sは，

$$\beta_s = \int_{a_{min}}^{a_{\max}} \sigma_s(a)n(a)da \tag{3.5.13}$$

である。

b. 葉群における散乱

葉面における散乱については様々なモデル化がなされている。ここでは葉面を平板とし散乱現象を幾何光学的に記述する。また偏光・回折は考慮せず，葉面における入射光の反射方向及び透過方向がそれぞれランバート余弦則に従うものとする（Bi-lambertian）。このとき，葉面に対する法線ベクトルをΩ_L，入射光ベクトル，散乱光ベクトルをそれぞれΩ'及びΩとすると，一枚の葉面における位相関数は，以下のように表せる。

$$p(\Omega' \rightarrow \Omega;\Omega_{\mathbf{L}}) = \frac{R_L\left|\Omega_{\mathbf{L}}\cdot\Omega\right|}{\omega_0\pi} \quad \text{if } (\Omega_{\mathbf{L}}\cdot\Omega)(\Omega_{\mathbf{L}}\cdot\Omega') < 0 \tag{3.5.14a}$$

$$p(\Omega' \rightarrow \Omega;\Omega_{\mathbf{L}}) = \frac{T_L\left|\Omega_{\mathbf{L}}\cdot\Omega\right|}{\omega_0\pi} \quad \text{if } (\Omega_{\mathbf{L}}\cdot\Omega)(\Omega_{\mathbf{L}}\cdot\Omega') > 0 \tag{3.5.14b}$$

ここで，単散乱アルベドωは葉面の半球反射率 R_L 及び半球透過率 T_L の和として表せる。

$$\omega = R_L + T_L \tag{3.5.15}$$

様々な角度分布を持つ葉面の集合体(以下葉群)からの散乱は，葉面の傾き分布関数 $g_L(\mathbf{\Omega}_L)$と葉面の散乱因子($|\mathbf{\Omega} \bullet \mathbf{\Omega}_L|$)の積の重み付き平均として以下のように計算できる。

$$P(\Omega' \rightarrow \Omega;\Omega_L) = \frac{2}{G(\Omega')}\int_{4\pi} g_L(\Omega_L)\left|\Omega'\cdot\Omega_L\right| p(\Omega' \rightarrow \Omega;\Omega_L)\,d\Omega_L \tag{3.5.16}$$

ここで$g_L(\mathbf{\Omega}_L)$は，以下のように規格化されている。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} g_L(\Omega_L)\,d\Omega_L = 1 \tag{3.5.17}$$

また， G は単位体積辺り・単位葉面積当たりの葉面の$\mathbf{\Omega}'$ベクトル方向への射影面積である。

$$G(\Omega') = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} g_L(\Omega_L)\left|\Omega'\cdot\Omega_L\right| d\Omega_L \tag{3.5.18}$$

なお，葉面の傾き分布が一様の時($g_L(\mathbf{\Omega}_L)=1$)，位相関数は解析的に計算することができる。

$$P(\Theta) = \frac{8}{3\pi}\left(\sin\Theta - \Theta\sin\Theta\right) + \frac{8T_L}{3\omega_0}\cos\Theta \tag{3.5.19}$$

球状を仮定した場合の大気粒子の場合に位相関数は散乱角のみの関数であるが，葉群における位相関数は，一般的には位相関数は入射方向と散乱方向の関数となる。ただし，(3.5.19)のように，葉面の傾き分布が一様な場合には散乱角のみの関数となる。

3.5.2 モンテカルロ法による散乱の扱い

a. 散乱後の光子のウェイト(アナログ吸収・非アナログ吸収)

モンテカルロ法で散乱イベントを発生させる場合, 散乱物質の吸収率$(1-\omega)$が 0 ではない場合には，一部の光子が吸収されることになる。この場合，乱数 ρ を用いて，$\rho<(1-\omega)$の時には, 光子は吸収されたと見なして光子のレイトレーシングを終了する方法(アナログ吸収)と，吸収率の割合だけ光子のウエイト w を減少させてレイトレーシングを続ける方法がある（非アナログ吸収)。後者の方法では，散乱後の光子の重みは単散乱アルベドωを用いて計算する。

$$w_{i+1}=\omega\, w_i \tag{3.5.20}$$

b. 光子の散乱方向の決定

散乱後の光子の進行方向は位相関数の分布に従うように決定する必要がある。位相関数が散乱角Θのみの関数の場合，散乱方向の座標における方位角Φは,乱数ρ_Φを用いて

$$\Phi = 2\pi\rho_\Phi \tag{3.5.21}$$

で決定できる（Appendix A6 の極座標法を参照)。散乱角は,

$$\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} P(\Theta)d\Omega = \frac{1}{2}\int_0^{\Theta} P(\Theta)\sin\Theta d\Theta = \rho_\Theta \tag{3.5.22}$$

の関係式で計算できる。散乱後の方向ベクトルの計算については Appendix A5 を参照してもらいたい。(3.5.22)が解析的に解ける（Θを求める）場合（例えば等方散乱とレイリー散乱の場合）とそうでない場合がある。

一般的には，式(3.5.22) の左辺の積分を実行し$\Theta=f(\rho_\Theta)$の形が解析的に求まる場合は極めて希である。また，たとえ解が求まったとしても，以下で述べるレイリー散乱の場合のように，数値計算を行う際に計算負荷が大きい場合も多くある。このような場合には， Look-Up-Table(LUT)法もしくは棄却法で散乱角を決定する。

LUT 法ではモンテカルロ計算を実行する前に， (3.5.22) の積分を数値的に計算し，ρ_Θ とΘの関係を計算して LUT を作成しておく。そしてモンテカルロ計算中では乱数ρ_Θに対応する散乱角Θを LUT から内挿して決定する。雲・エーロゾルによるミー散乱や葉面散乱の場合はこの方法が適している。図 3.5.2 はレイリー散乱(3.5.6)，エーロゾル

散乱(3.5.12), 葉面散乱 (3.5.19) における光子の散乱角と一様乱数の関係の一例である。

棄却法では，まず一様乱数でランダムに散乱角Θを計算し，その散乱角における位相関数 $P(\Theta)$の値と位相関数より常に大きい値を持つ比較関数 $R(\Theta)$の比($P(\Theta)/R(\Theta)$)と一様乱数[0, 1]を比較する。そして乱数の値が $P(\Theta)/R(\Theta)$より大きい場合には，求めた散乱方向を棄却する。そして, 散乱方向が決定できるまで以上の手続きを続けるものである(棄却法の詳細は 3.1 節を参照)。棄却法ではいかに効率の良い比較関数を決定できるかによって計算効率が変化する。棄却法は正確であり，計算資源の制約等で十分な大きさの LUT が準備できない場合には，非常に有効である。

葉面での散乱の場合には, 特殊な場合を除いて位相関数は光子の入射方向(θ_i, φ_i)と散乱方向(Θ, Φ)の関数となる。この場合，相対方位角($\varphi_r = \varphi_i - \Phi$)を用いると($\theta_i$, Θ, φ_r)の 3 パラメータの LUT となる。

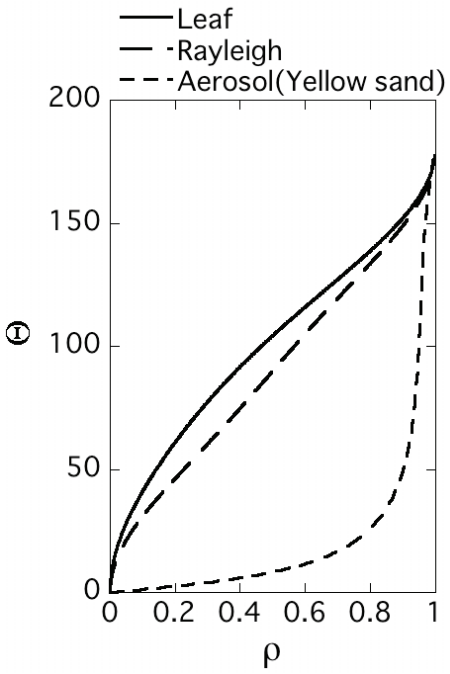


図 3.5.2 エーロゾル (Yellow sand, Re=0.375μm, λ=0.575μm, n= 1.54999995+0.00433298014*i*)， 葉面 (反射率=0.2; 透過率=0.1),レイリー散乱における一様乱数と散乱角の関係

等方散乱の場合

等方散乱の場合,

$$P(\Theta) = 1 \tag{3.5.23}$$

であるから，(3.5.22) は解析的に解けて，以下の式で散乱角Θが求まる。

$$\cos\Theta = 1 - 2\rho_\Theta \tag{3.5.24}$$

レイリー散乱の場合

レイリー散乱の場合位相関数は(3.5.6) で与えられ，cosΘ =μとするとμとρ_Θの関係は以下の３次方程式の解として求められる。

$$\mu^3 + 3\mu - 4 + 8\rho_\Theta = 0 \tag{3.5.25}$$

３次方程式の解の公式より,

$$\begin{aligned} \mu &= X - \frac{1}{X} \\ X &= \sqrt[3]{-(4\rho_\Theta - 2) + \sqrt{(4\rho_\Theta - 2)^2 + 1)}} \end{aligned} \tag{3.5.26}$$

となる。このように解析的にも解けるが，(3.5.26) の計算は実際あまり高速ではない。

棄却法を用いるとより効率的である。レイリー散乱の位相関数は最大 3/2 である。従って比較関数を 3/2 の一定値とする。

$$R(\Theta) = 3/2$$

今，まず等方散乱の場合の散乱角を (3.5.24) より求める。その角度がレイリー散乱の位相関数に従う確率は,

$$\begin{aligned} \frac{P(\Theta)}{R(\Theta)} &= \frac{3/4\left(1 + \cos^2\Theta\right)}{3/2} \\ &= 1 - 2\rho_\Theta\left(1 - \rho_\Theta\right) \end{aligned}$$

で与えられる。この確率ともう一つの独立な乱数 ρ_r とを比較し，最初に決めた角度を

棄却するか採択するかを決める。要するに，毎回乱数を２個発生させ，

$$\rho_r \le 1 - 2\rho_\Theta(1-\rho_\Theta)$$
$$\therefore \rho_r' \ge 2\rho_\Theta(1-\rho_\Theta)$$

を判定するだけである。平均するとわずか 1.5 回の繰り返しで最終的な角度が決まる。

<u>葉面散乱の場合：散乱方向を段階的に決定する方法</u>

この方法では散乱方向を以下の３段階で決定する。

１．葉面の分布関数に従う葉面の法線ベクトル$\mathbf{\Omega}_L$を一様乱数で決定
２．１ で決定した葉面の分布関数に従う葉面法線ベクトル$\mathbf{\Omega}_L$が，さらに入射方向$\mathbf{\Omega}'$に対する葉面方向$\mathbf{\Omega}_L$の射影面積の割合$|\Omega \cdot \Omega_L|$に比例するように分布を修正
３．葉面$\mathbf{\Omega}_L$における散乱を乱数で決定

氷晶など非球形粒子が指向性をもって分布しているときにも同様の方法が利用できる。本手法は Antyufeev and Marshak (1990) が用いた方法を参考にしている。但し彼らの方法では葉面の法線ベクトルを比較的容易に計算できる新たな確率分布関数で決定し，実際の分布に従う様に光子の重みを変更するというものであった。ここで記述している方法は，光子の重みを変更せず，位相関数に従う散乱分布を計算する方法である。

１．葉面の分布関数に従う葉面の法線ベクトル$\mathbf{\Omega}_L$を一様乱数で決定

多くの場合，葉面の傾き分布は方位角方向にランダムで天頂角方向のみに依存するから，$\mathbf{\Omega}_L$の方位角成分φ_Lは (3.5.21) と同様に求められる。天頂角θ_Lは以下の関係式で計算できる。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta_L} g_L(\theta_L)\sin\theta_L d\theta_L = \rho_{\theta_L} \qquad (3.5.27)$$

まず，(3.5.27)を用いてモンテカルロ計算を始める前に LUT を作成しておき，θ_Lは乱数の値から LUT を参照して決定する。但し $g_L=\cos(\theta_L)$など幾つかの場合については容易に解析的な関係式が得られる。または棄却法を用いても良い。

2. 入射方向を考慮して葉面分布関数を修正

1 で決定した葉面方向がさらに入射方向$\mathbf{\Omega}'$に対する葉面方向$\mathbf{\Omega}_L$ の射影面積の割合$|\Omega \cdot \Omega_L|$に比例するように分布を修正する。この場合，棄却法で決定する方法が最も容易である。つまり，入射方向と葉面の法線方向のなす角をθ_pとすると

$$|\Omega \cdot \Omega_L| = \cos\theta_p \tag{3.5.28}$$

であるから，一様乱数ρを用いて

$\cos\theta_p \geq \rho$ の時：1 の手順で決定した葉面方向を選択する。

$\cos\theta_p < \rho$ の時：1 の手順で決定した葉面方向を棄却し，1 の手順で葉面方向を再計算する。

3. 葉面$\mathbf{\Omega}_L$における散乱を乱数で決定

1 及び 2 の手順で葉面の法線ベクトル$\mathbf{\Omega}_L$が決まったら，その葉面上で反射・透過を決定する。反射・透過の判定は以下の式で行う。

$$\text{反射} \quad \frac{R_L}{R_L + T_L} \leq \rho \ \text{；透過} \quad \frac{R_L}{R_L + T_L} > \rho \tag{3.5.29}$$

また，葉面での反射・透過方向は Bi-lambertian の葉面の場合，

$$\mu = \sqrt{\rho}_\Theta,\ \phi = 2\pi\rho_\phi \qquad (\mu = \cos(\theta)) \tag{3.5.30}$$

で決定する。そして反射の場合$\Omega \cdot \Omega_L \geq 0$の時にはその散乱角を選択し，$\Omega \cdot \Omega_L < 0$の時には$-\mathbf{\Omega}$の方向を散乱方向として選択する。逆に透過の場合には$\Omega \cdot \Omega_L < 0$の時に，得られた散乱方向を選択し，$\Omega \cdot \Omega_L \geq 0$の場合には$-\mathbf{\Omega}$の方向を散乱方向として選択する。この方法では多次元の大規模な LUT を用意する必要がない。樹木の種類や場所毎に葉面傾き分布関数が異なる場合など，通常の LUT 法で多次元 LUT を作成すると計算メモリの負荷が大きい場合に有効である。ただし，葉面をランバート面ではなくより複雑な反射・透過モデルで計算したい場合には，計算がやや複雑になる。

3.6 反射

この節では一般的な BRDF モデルの反射の扱いについて議論する。

3.6.1 定義

a. 双方向反射率分布関数 BRDF

BRDF は Bidirectional Reflectance Distribution Function の略で，その名の通り，双方向（入射方向と反射方向）に依存した反射率の分布関数である。入射・反射方向をそれぞれ (θ_0, ϕ_0), (θ_1, ϕ_1) として，入射光の微少立体角を $d\xi$ とし，入射・反射光の放射強度をそれぞれ I_0, dI_0 とすると，BRDF (R) の定義式は，

$$R(\theta_0,\phi_0,\theta_1,\phi_1) = \frac{dI_1(\theta_1,\phi_1)}{I_0(\theta_0,\phi_0)\cos\theta_0 d\xi} \tag{3.6.1a}$$

である (Thomas and Stamnes, 1999)。反射光の放射輝度が微分要素になっているのは，入射光の $d\xi$ に対応する微少成分という意味で，全ての入射光について積分すると(θ_1, ϕ_1) 方向の放射強度になる。

$$d\xi = d\phi_0 d\cos\theta_0$$

であるので，

$$\begin{aligned} I(\theta_1,\phi_1) &= \int dI(\theta_1,\phi_1) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_0^1 d\cos\theta_0 R(\theta_0,\phi_0,\theta_1,\phi_1) I_0(\theta_0,\phi_0)\cos\theta_0 \end{aligned} \tag{3.6.1b}$$

式 (3.6.1) からわかるように，BRDF は放射輝度を放射照度で割った形をしており，規格化はされていない。よって 1 以下である必要はない。実際，無限大になりうる（完璧に平らな表面での鏡面反射の場合）。BRDF の単位は sr^{-1} である。

BRDF は相対方位角 ϕ を用いて三変数の関数として表現されることが多い。

$$\begin{aligned} &R(\theta_0,\phi_0,\theta_1,\phi_1) = R(\theta_0,\theta_1,\phi) \\ &\phi = \begin{cases} |\phi_0 - \phi_1| & \text{if } |\phi_0 - \phi_1| \le \pi \\ 2\pi - |\phi_0 - \phi_1| & \text{if } |\phi_0 - \phi_1| > \pi \end{cases} \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

BRDF は文献によっては別な定義となっていることがあるので，注意を要する。特に (3.6.1) に π がファクターとしてかかったパラメータは Bidirectional Reflectivity Factor (BRF) と呼ばれ，混同されやすい。

b. アルベドとの関係

ある平面の入射放射照度に対する反射放射照度の比をアルベドと言う。 Plane reflectance とも言う。アルベドは無次元量であり，1 を超えることはない。アルベド $\alpha(\theta_0, \phi_0)$ は入射方向に依存した量であり，BRDF と密接に結びついている。

$$\alpha(\mu_0,\phi_0) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} R(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1)\mu_1 d\phi_1 d\mu_1 \tag{3.6.3}$$

ただし $\mu_* = \cos\theta_*$ である。

c. 双方向反射確率密度関数 (BR-PDF)

水平面の BRDF を考えたとき，以下の関数は反射放射照度の二次元確率密度関数 (PDF) を表している。

$$P(\mu_0,\phi_0;\mu_1,\phi_1) \equiv \frac{R(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1)\mu_1}{\alpha(\mu_0,\phi_0)} \tag{3.6.4}$$

これを「双方向反射確率密度関数 (BR-PDF)」と呼ぶことにする。この関数は以下のように規格化されている。

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} P(\mu_0,\phi_0;\mu_1,\phi_1) d\phi_1 d\mu_1 = 1 \tag{3.6.5}$$

d. 等方反射

BRDF が方向によらず定数の場合の反射を等方反射（Lambert 反射）という。この場合アルベドも定数である。

$$R(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1) = R_0 \tag{3.6.6}$$

$$\alpha(\mu_0,\phi_0) = R_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu_1 d\phi_1 d\mu_1 = \pi R_0 \tag{3.6.7a}$$

$$\therefore R_0 = \frac{\alpha}{\pi} \tag{3.6.7b}$$

BR-PDF は以下のようになる。

$$P(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1)=\frac{\mu_1}{\pi} \tag{3.6.8}$$

これについて式 (3.6.5) が成り立っていることは容易に示される。

e. BRDF の非等方性

BRDF が等方反射からどれだけ異なるかを示す指標はいくつか考えられる。例えば散乱位相関数の非等方性因子と同様に計算した μ_1 のモーメントである。しかしこれは方位角依存性がないことを暗に仮定しているか方位角依存性を無視した非等方性パラメータであると言える。ここでは BRDF の非等方性 χ として「平均絶対偏差」に基づくパラメータを定義する。考えている BRDF モデルの BR-PDF, P と等方反射の場合の式 (3.6.8) との偏差を平均する。

$$\chi=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|P(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1)-\frac{\mu_1}{\pi}\right|d\phi_1 d\mu_1 \tag{3.6.9}$$

これは無次元量であり，0–1 の値をとる。等方反射の時 $\chi = 0$ であり，BRDF がディラックのデルタ関数で与えられるとき（鏡面反射）$\chi = 1$ である。

f. 方位角平均 BRDF

BRDF を射出方位角平均したもの関数を以下のように定義する。

$$\overline{R}(\mu_0,\phi_0,\mu_1)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1)d\phi_1 \tag{3.6.10}$$

3.6.2 BRDF を考慮した反射の扱い

簡単のため水平面における反射を考える。

モデル光子にウェイトを持たせたモンテカルロモデルでは，様々な反射の扱い方が考えられる。例えば，はじめに反射方向を決めてから反射方向に依存してウェイトを変える方法（重み付け法）などがありうる。しかしそのようなやり方は経済的ではない。個々のウェイトが異なるということはそのモデル光子が輸送する（水平面に対する）放射照度が各々異なるということを意味している。反射を複数回繰り返した場合，ウェイトは 0 から無限大にばらつくことになる。よってモンテカルロ積分の結果には非常に大

きなノイズが乗ってしまう。

今考えているモンテカルロシミュレーションでは，ある有限な領域内に存在する光子数が保存される。個々のモデル光子は水平面に対する放射照度（フラックス，放射束密度）が一定の値を保有している。吸収されない限りその放射照度は変化しない。反射する場合も，個々のモデル光子の水平面に対する放射照度が方向によらず一定になるように方向を決める必要がある。ここでは，反射する方向によらず反射後の光子のウェイトが一定になるような定式化を考える。光子が (μ_0, ϕ_0) 方向から入射して反射するとき，光子のウェイトは次のように変化する。

$$w' = w\alpha(\mu_0, \phi_0) \tag{3.6.11}$$

この式は反射後のウェイトが反射方向に依存せず，入射方向にのみ依存することを意味している。α は常に 1 より小さい。

次に反射方向の決定を考える。 (μ_1, ϕ_1) についての二次元確率密度関数 (PDF) が BR-PDF に従うように乱数で方向を決めればよい。

まず μ_1 を決める。

$$p(\mu_1) = \int_0^{2\pi} P(\mu_1, \phi_1) d\phi_1 \tag{3.6.12}$$

とおくと，式 (3.6.5) より，

$$\int_0^1 p(\mu_1) d\mu_1 = 1 \tag{3.6.13}$$

であるので，

$$\int_0^{\mu_1} p(\mu_1') d\mu_1' = \rho_{\mu_1} \tag{3.6.14}$$

を解けば μ_1 が決まる。ただし ρ_*は乱数である。一般的には左辺は解析的に解けないので，LUT 法か棄却法を用いる。

次に ϕ_1 を決めるには，

$$\frac{\int_0^{\phi_1} P(\mu_1, \phi_1') d\phi_1'}{\int_0^{2\pi} P(\mu_1, \phi_1') d\phi_1'} = \rho_{\phi_1} \tag{3.6.15}$$

を解けばよい。この左辺もやはり一般的には解析的に解けないので，LUT 法か棄却法

を用いる。

注意すべきは式 (3.6.4) で μ_1 を掛けた PDF を考えているため，ここで述べた式は既に水平面における反射の場合しか適用できないということである。傾いた面の時は μ_1 を掛けない PDF を考えて，それに従う方向を決めた後で，水平面に対する余弦成分を用いて棄却法を適用すればよい（詳細は本稿では触れない)。

モンテカルロ放射モデルで放射輝度を計算する場合は一般的に局所推定法 (local estimation method, LEM) (3.9 節で詳しく述べる) が用いられる。散乱・反射・射出過程の扱いは様々なアルゴリズムが考えられるが，本稿では，

1. 式 (3.6.11) によるウェイトのスケーリング
2. ロシアンルーレットによるウェイトの再スケーリング
3. LEM による放射輝度のサンプリング
4. イベント後の方向の決定

という手順で計算することにする。この順番が入れ替わると使用すべき公式も微妙に変わるので注意が必要である。上のような手順を踏むのは，負荷の高い LEM の計算の前にウェイトのばらつきを減らしておきたいからである。散乱・反射後のウェイトがイベントによって 1 であったり，0.01 であったりする場合，明らかに 0.01 のウェイトの場合は重要ではない。そのような重要ではないモデル光子に対して負荷の高い LEM の計算をするのは CPU の無駄遣いである。かくてウェイトが小さいものはロシアンルーレットで削減した後で，LEM の計算を行うことにする。

3.6.3 等方反射: ランバート面

等方反射における反射方向の決定法について述べる。

a. 水平面における等方反射

水平な面における等方反射の場合，立体角を ξ として，反射方向の PDF は

$$\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}\cos\theta d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos\theta d\cos\theta d\phi = 1 \tag{3.6.16}$$

と規格化される。

方位角方向には一様分布であるので，反射後の方位角 ϕ は，

$$\phi = 2\pi\rho_\phi \tag{3.6.17}$$

により決まる。以下に天頂角の決定方法を述べる。

解析的方法

反射方向の天頂角 θ は，一様乱数を ρ として，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta}\cos\theta' d\cos\theta' d\phi = \rho' \tag{3.6.18}$$

$$\therefore \cos^2\theta = 1-\rho' \equiv \rho_\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{\rho_\theta} \tag{3.6.19}$$

により決まる。

棄却法

まず等方的に方向を決める。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\cos\theta} d\cos\theta' = \rho_\theta \tag{3.6.20}$$

$$\therefore \cos\theta = \rho_\theta \tag{3.6.21}$$

次に棄却法を適用して $\cos\theta$ 依存性を付加する。今最終的な天頂角が上式で決めた θ である確率が $\cos\theta$ であるので，別な乱数を一個発生させて，

$$\begin{cases} \text{If } \rho < |\cos\theta|, \text{ finish.} \\ \text{If } \rho \geq |\cos\theta|, \text{ rejection.} \end{cases} \tag{3.6.22}$$

を判断する。「棄却」の場合はもう一度 (3.6.21)によって方向を決める。一回のパスで棄却される確率は 1/2 である。よって平均すると，2 パスで方向が決定する。前述の方法と比べて乱数を余分に必要とするが，(3.6.19)のような平方根を計算する必要がない。よって高速な乱数生成アルゴリズムを使用している場合は棄却法の方が速いという可能性もある。

b. 垂直な面における等方反射

上下半球の放射輝度分布の相似性を考慮すると，反射方向の PDF は

$$\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}|\cos\theta|d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_{-1}^{1}|\cos\theta|d\cos\theta d\hat{\phi}$$
$$= 2\int_0^1 \cos\theta d\cos\theta = 1 \tag{3.6.23}$$

と規格化される。ただし，θ は前節と同じくモデルの座標系における天頂角であり，一方 $\hat{\phi}$ は反射面の normal 方向の方位 Φ から測った相対方位角であり，

$$\hat{\phi} \equiv \phi - \Phi = \pi(\rho_\phi - \frac{1}{2}) \tag{3.6.24}$$

により決定できる。以下に θ の決定方法を述べる。

解析的方法

次式により決まる。

$$\cos\theta = \begin{cases} \sqrt{1-2\rho_\theta} & \text{if } \rho_\theta < 1/2 \\ -\sqrt{2\rho_\theta - 1} & \text{if } \rho_\theta \geq 1/2 \end{cases} \tag{3.6.25}$$

棄却法

等方的に方向を決めるとき，

$$\cos\theta = 1 - 2\rho_\theta \tag{3.6.26}$$

とし，(3.6.22) により棄却法を適用する。

c. 任意の方向を向いた平面における等方反射

反射面の normal 方向を (Θ, Φ) とする。反射方向の PDF は

$$\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}|\cos\theta|d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1|\cos\theta|d\cos\hat{\theta}d\hat{\phi} = 1 \tag{3.6.27}$$

と規格化される（途中の変形は省略した）。(Θ, Φ) から測った天頂角と方位角をそれぞれ $\hat{\theta},\hat{\phi}$ とすると，

$$\cos\theta = \sin\Theta\sin\hat{\theta}\cos\hat{\phi} - \cos\Theta\cos\hat{\theta} \tag{3.6.28}$$

となる。

解析的方法

まず,

$$\cos\theta' = \sqrt{\rho_\theta} \tag{3.6.29}$$
$$\phi' = 2\pi\rho_\phi \tag{3.6.30}$$

により上半球内の方向 $\mathbf{\Omega}' = (\theta', \phi')^{\mathrm{T}}$ を決める。等方反射の場合は放射輝度の分布が均一であるので，方向 $\mathbf{n} = (\Theta, \Phi)^{\mathrm{T}}$ との内積をとり,

$$\mathbf{\Omega} \equiv \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbf{\Omega}' & \text{if } \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ -\mathbf{\Omega}' & \text{if } \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases} \tag{3.6.31}$$

によって，反射方向が決まる。式 (3.6.31) のようなトリックが使えるのは等方反射の場合のみであることに注意されたい。

棄却法

二つの方法が考えられる。一つは，水平面における等方反射の場合の棄却法を用いて方向を決めた後で, (3.6.31)によって修正する方法である。この方法の方が簡便である。

別な方法では，まず (Θ, Φ) から測った天頂角と方位角を等方的に決める。

$$\cos\hat{\theta} = \rho_\theta \tag{3.6.32}$$
$$\hat{\phi} = 2\pi\rho_\phi \tag{3.6.33}$$

反射方向 (θ, ϕ) は方向 (Θ, Φ) を $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ だけ回転させた方向である。よって大気中での散乱と同じ式で，(θ, ϕ) が求められる。前述同様に,

$$\begin{cases} \text{If } \rho < |\cos\theta|, \text{ finish.} \\ \text{If } \rho \geq |\cos\theta|, \text{ rejection.} \end{cases} \tag{3.6.34}$$

を判断し，「棄却」の場合はもう一度 (3.6.32–33) 式によって方向を決める。この場合も一回のパスで棄却される確率は 1/2 である。等方反射に限らず一般的な BRDF を傾いた平面上で扱う場合に同様の手法が使える。

結局，等方反射の場合は解析的方法と棄却法どちらでも計算することができる。計算速度の面から考えてもどちらでも大差ないと考えられる。棄却法は一般性が高く，傾いた平面上の任意の BRDF の場合に拡張可能である。

3.6.4 拡散・鏡面混合モデル: DSM model

拡散反射と鏡面反射の混合モデル (Diffuse-Specular Mixture model, DSM model) の扱いについて述べる。鏡面反射ではマイクロファセットの分布をモデル化して表面の粗度を考慮する。BRDF とアルベドはそれぞれ

$$R(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1) = f_\mathrm{d}R_\mathrm{d} + (1-f_\mathrm{d})R_\mathrm{s}(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1) \tag{3.6.35a}$$

$$\alpha(\mu_0) = f_\mathrm{d}\alpha_\mathrm{d} + (1-f_\mathrm{d})\alpha_\mathrm{s}(\mu_0) \tag{3.6.35b}$$

となる。ただし，拡散反射については，

$$R_\mathrm{d} = \frac{\alpha_\mathrm{d}}{\pi} \tag{3.6.36}$$

が成り立つ。

a. 粗度を考慮した鏡面反射

Nakajima and Tanaka (1983) の海面反射モデルを考える。入射光の進む方向の逆方向を $\mathbf{\Omega}_0 = (\mu_0, \phi_0)^\mathrm{T}$ とし，反射方向を $\mathbf{\Omega}_1 = (\mu_1, \phi_1)^\mathrm{T}$ とする。この二方向の間の角度 2β は，

$$\cos 2\beta = \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1 \tag{3.6.37a}$$

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1\right)} \tag{3.6.37b}$$

により決まり，このときのフレネル反射率を $R_\mathrm{F}(\beta)$とする。マイクロファセットの方向を $\mathbf{\Omega}_\mathrm{n} = (\mu_\mathrm{n}, \phi_\mathrm{n})^\mathrm{T}$ とすると，

$$\mathbf{\Omega}_\mathrm{n} = \frac{\mathbf{\Omega}_0 + \mathbf{\Omega}_1}{\left\|\mathbf{\Omega}_0 + \mathbf{\Omega}_1\right\|} \tag{3.6.38a}$$

$$\mu_\mathrm{n} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2\cos\beta} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{\sqrt{2\left(1+\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1\right)}} \tag{3.6.38b}$$

$$\tan^2\theta_{\mathrm{n}} = \frac{1-\mu_{\mathrm{n}}^2}{\mu_{\mathrm{n}}^2} = \left(\partial z/\partial x\right)^2 + \left(\partial z/\partial y\right)^2 \tag{3.6.38c}$$

が成り立つ。マイクロファセットの傾きを二次元正規分布で与える。方位角方向には等方的とする。

$$P\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{\left(\partial z/\partial x\right)^2 + \left(\partial z/\partial y\right)^2}{\sigma^2}\right] \tag{3.6.39a}$$

$$p(\mu_{\mathrm{n}}) = \frac{1}{\pi\sigma^2\mu_{\mathrm{n}}^3}\exp\left(-\frac{1-\mu_{\mathrm{n}}^2}{\sigma^2\mu_{\mathrm{n}}^2}\right) \tag{3.6.39b}$$

BRDF は,

$$R_{\mathrm{s}}(\mu_0, \phi_0, \mu_1, \phi_1) = \frac{R_{\mathrm{F}}(\beta)}{4\mu_0\mu_1\mu_{\mathrm{n}}} p(\mu_{\mathrm{n}}) f_{\mathrm{s}}(\mu_0, \mu_1) \tag{3.6.40}$$

で与えられる。ここで，f_{s} は遮蔽因子 (shadowing factor) であり，以下で与えられる。

$$f_{\mathrm{s}}(\mu_0, \mu_1) = \frac{1}{1 + F(\mu_0) + F(\mu_1)} \tag{3.6.41a}$$

$$F(\mu_*) = \frac{1}{2}\left[\frac{\exp\left(-\upsilon_*^2\right)}{\sqrt{\pi}\upsilon_*^2} - \mathrm{erfc}\left(\upsilon_*\right)\right] \tag{3.6.41b}$$

$$\upsilon_* = \frac{\mu_*}{\sigma\sqrt{1-\mu_*^2}} \tag{3.6.41c}$$

erfc はエラー関数の余りである。

$$\mathrm{erfc}\left(\upsilon_*\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\upsilon_*}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \tag{3.6.41d}$$

傾き σ は航空機観測のデータなどに基づいて，Nakajima & Tanaka (1983) で次のように与えられている。

$$\sigma^2 = 0.00534\ u_{10} \tag{3.6.42a}$$

Cox & Munk (1954) では,

$$\sigma^2 = 0.00512\ u_{10} + 0.003 \tag{3.6.42b}$$

である。

b. DSM モデルのアルベド

混合モデルのアルベドは，(3.6.35) に従って計算する。ここで未知なのは鏡面反射のアルベドである。表面が完全に平らの場合 ($\sigma = 0$) は，

$$\alpha_s(\mu_0) = R_F(\theta_0) \tag{3.6.43}$$

である。粗い表面 ($\sigma > 0$) では，(μ_0, $\phi_0 + \pi$) の方向の周りで立体角 ξ について積分して，

$$\begin{aligned}\alpha_s(\mu_0) &= \int_{2\pi} R(\mu_0, \phi_0, \mu_1, \phi_1)\mu_1 d\xi \\ &= \frac{A(\mu_0)}{\mu_0}\end{aligned} \tag{3.6.44}$$

$$A(\mu_0) = \int_{\mu'_{\min}}^{1} d\mu' \int_{\phi'_{\min}}^{\pi} d\phi'\, B(\mu_0, \mu', \phi') \tag{3.6.45a}$$

$$B(\mu_0, \mu', \phi') = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\frac{R_F(\beta)}{\mu_n^4}\exp\left(-\frac{1-\mu_n^2}{\sigma^2\mu_n^2}\right) f_s(\mu_0, \mu_1) \tag{3.6.45b}$$

となる。ここで，(μ_1, ϕ_1) 方向は (μ_0, $\phi_0 + \pi$) の方向を (μ', ϕ') だけ回転した方向であり，

$$\mu_1 = \sin\theta_0 \sin\theta' \cos\phi' - \mu_0\mu' \tag{3.6.46a}$$

が成り立つ。β や μ_n は (3.6.37–38) により求まる。μ' が 1 に近いときには

$$\tilde{\mu}' \equiv 1 - \mu' \tag{3.6.46b}$$

を変数に考えた方がよい。すると，

$$\sin\theta' = \sqrt{1 - \mu'^2} = \sqrt{\tilde{\mu}'(2 - \tilde{\mu}')} \tag{3.6.46c}$$

となる。式 (3.6.46c) の方向が上向きである ϕ'の範囲の下限は，

$$\gamma = \frac{\mu_0\mu'}{\sin\theta_0 \sin\theta'} \tag{3.6.47a}$$

$$\phi'_{\min} = \begin{cases} \pi & \text{if } \gamma < -1 \\ \cos^{-1}\gamma & \text{if } -1 \le \gamma \le 1 \\ 0 & \text{if } \gamma > 1 \end{cases} \tag{3.6.47b}$$

と与えられる。マイクロファセットの傾きが σ の c 倍（およそ 3 倍）までの範囲を積分区間とすると,

$$\mu' > \mu'_{\min} = \frac{1 - c^2\sigma^2}{1 + c^2\sigma^2} \tag{3.6.48a}$$

あるいは,

$$1 - \mu' < 1 - \mu'_{\min} = \frac{2c^2\sigma^2}{1 + c^2\sigma^2} \tag{3.6.48b}$$

である。関数 A は数値的に積分して LUT にしておく。

c. DSM モデルの角度分布関数の計算

反射イベントからの放射輝度を計算する場合は BRDF を albedo で割った量（規格化された角度分布関数）を求める必要がある（3.9 節参照）。(3.6.35) の定義式に従って計算すると以下の式となる。

$$\frac{R(\mu_0, \phi_0, \mu_1, \phi_1)}{\alpha(\mu_0)} = \frac{f_{\mathrm{d}}\,\alpha_{\mathrm{d}}/\pi + (1 - f_{\mathrm{d}})R_{\mathrm{s}}(\mu_0, \phi_0, \mu_1, \phi_1)}{\alpha(\mu_0)} \tag{3.6.49a}$$

しかし，難しいのは平らな表面（σ が小）では鏡面反射の BRDF が鋭いスパイク上のピークを持つことである。このような量をサンプリングすると，ノイズが激しく，なかなか収束しない。よってマイクロファセットの傾き σ はある閾値以上にせざるを得ない。これによりわずかな artifact が生じる。入射するモデル光子が等方的であれば BRDF はより滑らかな関数で置き換えても問題ないと考えられる。そこで，σ の最小値を入射光の非等方性と結びつけて設定するという方法が考えられる。

しかし, σ をある閾値以上にしたとしても (3.6.49a) を放射輝度の計算で用いるとノイズが大きく，あまり効率的ではない。またアルベド α を計算したときと異なる σ を (3.6.49a) の R_s の計算に用いるのはエネルギーの保存に反している。そこでアルベド α は保存して角度分布の形だけを変形する方法を考えよう。入射光が等方的なとき拡散反射の割合 f_d を大きくすることにする。同時に拡散反射のアルベドを修正し，平均アルベ

ドの保存を考えると，(3.6.35b) より，

$$\begin{aligned}\alpha(\mu_0) &= f_\mathrm{d}\alpha_\mathrm{d} + (1-f_\mathrm{d})\alpha_\mathrm{s}(\mu_0) \\ &= f'_\mathrm{d}\alpha'_\mathrm{d} + (1-f'_\mathrm{d})\alpha_\mathrm{s}(\mu_0)\end{aligned} \tag{3.6.49b}$$

$$\alpha'_d = \frac{f_d}{f'_d}\alpha_d + \left(1-\frac{f_d}{f'_d}\right)\alpha_s(\mu_0) \tag{3.6.49c}$$

式 (3.6.49a) は以下のように変形される。

$$\frac{R'(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1)}{\alpha(\mu_0)} = \frac{f'_\mathrm{d}\alpha'_\mathrm{d}/\pi + (1-f'_\mathrm{d})R_\mathrm{s}(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1)}{\alpha(\mu_0)} \tag{3.6.49d}$$

この関数は修正前の (3.6.49a) よりも鏡面反射のピークが弱まり, より滑らかな角度分布を持つ。平均アルベドは修正前と同じである。

d. DSM モデルの反射方向の決定

まず乱数によって拡散反射か鏡面反射か決める。それぞれの確率は,

$$f_\mathrm{d}\frac{\alpha_\mathrm{d}}{\alpha},\quad (1-f_\mathrm{d})\frac{\alpha_\mathrm{s}}{\alpha}$$

で与えられる。

鏡面反射の場合，平らな面では,

$$\mathbf{\Omega}_1 = -\mathbf{\Omega}_0 + 2\mu_0\,\mathbf{\Omega}_\mathrm{n} \tag{3.6.50}$$

となる。$\mathbf{\Omega}_\mathrm{n}$ は天頂方向である。

平らでないときは (3.6.40), (3.6.44) より，以下の PDF に従う方向を決める。

$$\begin{aligned}Q_\mathrm{s}(\mu_0,\mu_1,\phi_1-\phi_0) &= \frac{R_\mathrm{s}(\mu_0,\phi_0,\mu_1,\phi_1)\mu_1}{\alpha_\mathrm{s}(\mu_0)} \\ &= \frac{R_\mathrm{F}(\beta)f_\mathrm{s}(\mu_0,\mu_1)}{4A(\mu_0)\mu_\mathrm{n}^4}P\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{3.6.51}$$

まずマイクロファセットの向き $\mathbf{\Omega}_\mathrm{n}$ を P に従うようにランダムに決めて，棄却法によって関数

$$S(\mu_0, \mu_1, \phi_1 - \phi_0) = \frac{R_{\mathrm{F}}(\beta) f_{\mathrm{s}}(\mu_0, \mu_1)}{\mu_{\mathrm{n}}^4} \tag{3.6.52}$$

に対する依存性を持たせる（スケーリングする）。

マイクロファセットの傾きは分散が $\sigma^2/2$ の等方的な二次元正規分布に従っているので，Box-Muller 法（3.1.2 小節, Numerical Recipes 参照）により，以下のように二つの一様乱数によって決まる。

$$\tan^2\theta_{\mathrm{n}} = \frac{\sigma^2}{2}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.6.53}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \sqrt{-2\ln\rho_1}\cos 2\pi\rho_2 \tag{3.6.54a}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \sqrt{-2\ln\rho_1}\sin 2\pi\rho_2 \tag{3.6.54b}$$

これを効率よく計算するには, 乱数 ρ_3, ρ_4 によってまず単位円内の点をランダムに選ぶ。ただし傾きが無限大になるのを避けるため，円の中心付近は棄却する。つまり，

$$W_1 = 1 - 2\rho_3 \tag{3.6.55a}$$

$$W_2 = 1 - 2\rho_4 \tag{3.6.55b}$$

$$r_{\min}^2 \le r^2 \equiv W_1^2 + W_2^2 \le 1, \qquad r_{\min}^2 \approx 0.001 \tag{3.6.55c}$$

となるまで繰り返す。そして，

$$\rho_1 = r^2 \tag{3.6.56a}$$

$$\cos\phi_{\mathrm{n}} = \cos 2\pi\rho_2 = W_1/r \tag{3.6.56b}$$

$$\sin\phi_{\mathrm{n}} = \sin 2\pi\rho_2 = W_2/r \tag{3.6.56c}$$

とすれば,

$$\tan^2\theta_{\mathrm{n}} = -\sigma^2\ln r^2 \tag{3.6.57a}$$

$$\therefore \mu_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sigma^2\ln r^2}} \tag{3.6.57b}$$

$$\therefore \sin\theta_{\mathrm{n}} = \mu_{\mathrm{n}}\sqrt{-2\sigma^2\ln r^2} \tag{3.6.57c}$$

によって，サイン・コサインの計算を回避できる。以上より，方向 $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{n}}$ が決まった。反射方向は,

$$\mathbf{\Omega}_1 = -\mathbf{\Omega}_0 + 2\cos\beta\,\mathbf{\Omega}_\mathrm{n} \tag{3.6.58a}$$
$$\cos\beta = \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_\mathrm{n} > 0 \tag{3.6.58b}$$

より決まる。式 (3.6.58b) の内積が負の時は反射は起こらないので棄却する。また反射方向が下向きの時も棄却して再度ランダムに決める。

次に (3.6.52) の関数 S に基づいて棄却法を適用する。そのため S の最大値 $S_{\max}(\mu_0)$ を事前に求めておく。この最大値は principal plane 上にある。式 (3.6.55c) で r に下限を設けたためにマイクロファセットの傾きはある程度以下に限定されており,

$$\mu_\mathrm{n} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2 \ln r_{\min}^2}} \equiv \mu_{\min} \equiv \cos\theta_{\max} \tag{3.6.59}$$

が成り立つ。よって反射される方向もある範囲に限定される。その範囲の両端は,「相対天頂角」なるものを

$$\hat{\theta}_1 \equiv \begin{cases} -\theta_1 & \text{if } |\phi_1 - \phi_0| < \pi/2 \\ \theta_1 & \text{if } |\phi_1 - \phi_0| \geq \pi/2 \end{cases} \tag{3.6.60}$$

と定義すると，それぞれ

$$\hat{\theta}_1 = \theta_0 - 2\theta_{\max},\ \text{if } |\phi_1 - \phi_0| = 0 \tag{3.6.61a}$$
$$\hat{\theta}_1 = \theta_0 + 2\theta_{\max},\ \text{if } |\phi_1 - \phi_0| = \pi \tag{3.6.61b}$$

で与えられる。ここで,

$$\cos 2\theta_{\max} = 1 - 2\sin^2\theta_{\max}$$
$$\sin 2\theta_{\max} = 2\sin\theta_{\max}\cos\theta_{\max}$$

である。ただし式 (3.6.61) の絶対値は共に $\pi/2$ を超えない。この範囲で黄金分割法 (NR) などを使って $S_{\max}$ を求めて LUT にしておく。反射方向を決めるときには μ_0 について内挿する。問題は関数 S が鋭いピークを持ち，そこに最大値がある場合である。そこで鉛直方向を向いたマイクロファセット ($\mu_\mathrm{n} = 1$) の場合の S の値を S_0 として，$S_{\max}/S_0$ があまり大きくならないように以下のように調整しておく。

$$S'_{\max} = \begin{cases} S_{\max} & \text{if } S_{\max} < DS_0 \\ S_0\left[D-1+\left(\dfrac{S_{\max}}{S_0}-D+1\right)^E\right] & \text{if } S_{\max} \geq DS_0 \end{cases} \tag{3.6.62}$$

ここで D, E は定数である（$D = 4$, $E = 0.5$ 程度にするのが推薦される）。これを用いて，確率

$$\frac{S}{S'_{\max}} \tag{3.6.63}$$

に基づき棄却法を適用する。

図 3.6.1 は太陽天頂角 60 度，傾きの分散 0.04 の時に実際にモンテカルロシミュレーションによって再現された反射方向の天頂角・方位角に対する BRF である。対応する解析的な BRF と共に示す。

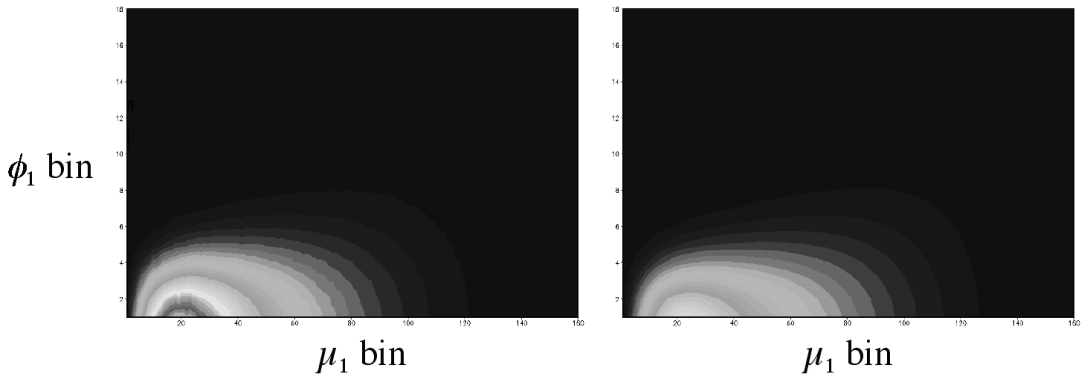


図 3.6.1 DSM モデルの解析的な BRF（左）と MC シミュレーションによる BRF（右）

3.6.5 Rahman-Pinty-Verstraete (RPV) BRDF モデル

Rahman, Pinty &Verstraete (1993) (以下 RPV) は植生や土壌の BRDF を表現する半経験的なモデルを提案した。

RPV モデルは三変数の BRDF モデルであり，(3.6.2) の相対方位角の関数である。RPV モデルを本稿の表記で書くと以下のようになる。

$$R(\theta_0,\theta_1,\phi)=\frac{\rho_0}{\pi}\left\{\frac{\cos^{k-1}\theta_0\cos^{k-1}\theta_1}{\left(\cos\theta_0+\cos\theta_1\right)^{1-k}}F(\gamma)\left[1+H(G)\right]+\frac{\sigma}{\cos\theta_0}\right\} \tag{3.6.65}$$

ここで，ρ_0, σ は定数， F は Henyey-Greenstein 関数と同様の関数

$$F(\gamma)=\frac{1-\Theta^2}{\left[1+\Theta^2+2\Theta\cos\gamma\right]^{3/2}} \tag{3.6.66}$$

であり，これが全体的な前方・後方散乱の非等方性を表現する。γ は位相角（入射光の逆方向ベクトル $\mathbf{\Omega}_0$ と反射方向ベクトル $\mathbf{\Omega}_1$ の間の角度）である。

$$\cos\gamma=\mathbf{\Omega}_0\cdot\mathbf{\Omega}_1=\cos\theta_0\cos\theta_1+\sin\theta_0\sin\theta_1\cos\phi \tag{3.6.67}$$

また，関数 H は，ホットスポット効果を表す関数である。

$$1+H(G)=1+\frac{1-\rho_0}{\delta+G} \tag{3.6.68}$$

通常 $\delta=1$ だが，特別な場合に δ をパラメータとすると実際の観測に良くあう。G は幾何学的因子で，次式で与えられる。

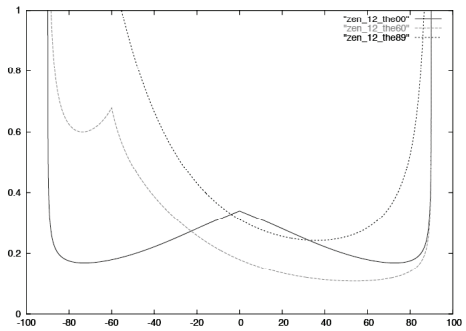
$$G=\sqrt{\tan^2\theta_0+\tan^2\theta_1-2\tan\theta_0\tan\theta_1\cos\phi} \tag{3.6.69}$$

ホットスポットは $\theta_0=\theta_1$, $\phi=0$ にあり，鋭くとがった角度分布を持つ。ホットスポットを除けば RPV モデルは滑らかな角度分布である。

RPV モデルのパラメータは ρ_0, k, Θ, δ, σ の 5 つである。本稿では簡単のため $\sigma=0$ とする。BRDF の式は，

$$R(\theta_0,\theta_1,\phi)=\frac{\rho_0}{\pi}\frac{\cos^{k-1}\theta_0\cos^{k-1}\theta_1}{\left(\cos\theta_0+\cos\theta_1\right)^{1-k}}F(\gamma)\left[1+H(G)\right] \tag{3.6.70}$$

となる。図 3.6.2 に例を示す。



View Zenith Angle

図 3.6.2 RPV モデルの BRF (= BRDF*π)と反射天頂角の関係の一例。入射天頂角 0, 60, 89 度で計算した。

a. RPV モデルのアルベド

アルベドの定義式に従って計算する。

$$\begin{aligned}\alpha(\mu_0)&=\int_0^1\int_0^{2\pi}R(\mu_0,\mu_1,\phi)\mu_1 d\phi d\mu_1\\&=2\int_0^1\int_0^{\pi}R(\mu_0,\mu_1,\phi)\mu_1 d\phi d\mu_1\\&=\frac{2\rho_0}{\pi}\mu_0{}^{k-1}\int_0^1\left\{\frac{\left[\mu_1\left(\mu_0+\mu_1\right)\right]^k}{\left(\mu_0+\mu_1\right)}\int_0^{\pi}F(\gamma)\left[1+\frac{1-\rho_0}{\delta+G}\right]d\phi\right\}d\mu_1\end{aligned} \tag{3.6.71}$$

簡単のため,

$$A(\mu_0)=\frac{2\rho_0}{\pi}\int_0^1 B(\mu_0,\mu_1)d\mu_1 \tag{3.6.72a}$$

$$B(\mu_0,\mu_1)=\frac{\left[\mu_1\left(\mu_0+\mu_1\right)\right]^k}{\left(\mu_0+\mu_1\right)}\int_0^{\pi}C(\mu_1,\phi)d\phi \tag{3.6.72b}$$

$$C(\mu_0,\mu_1,\phi)=F(\gamma)\left[1+\frac{1-\rho_0}{\delta+G}\right] \tag{3.6.72c}$$

と表すと，アルベドは以下のようになる。

$$\alpha(\mu_0)=\mu_0{}^{k-1}A(\mu_0) \tag{3.6.73}$$

この関数 A は数値的に計算する以外にない。上式 (3.6.72b)で ϕ についての被積分関数 C は十分滑らかである。よってガウスの求積法 (Press et al., 1992) などによって高精度に積分可能である。μ_1 についての被積分関数はホットスポットの所（$\mu_1=\mu_0$）で滑らかではない。よって積分区間を $0\le\mu_1<\mu_0$ と $\mu_0\le\mu_1\le1$ の二つに分けてそれぞれでガウスの求積法などによって積分すると精度良く計算できる。

反射するたびに上の二重積分を逐一計算するのは負荷が大きすぎる。従って，関数 A は μ_0 についての LUT にしておくのが良い。幸いにして関数 A は μ_0 について非常に滑らかな関数であり，μ_0 について 4–6 点程度とれば充分な精度が得られる（内挿による誤差 ~0.3%以下！）。場所 (x, y) によりパラメータが変化する場合，関数 A は (x, y, μ_0) についての三次元の LUT となる。

アルベドは本来 0–1 の範囲内でなければならないが，式 (3.6.73) のアルベドは経験的なモデルなので 0–1 の範囲から飛び出ることがある（特に μ_0 が小さいとき）。そのようなことがないように調整しなければならない。アルベド α が 1 を超えるときには BRDF を $1/\alpha$ 倍にする。すると，アルベドも $1/\alpha$ 倍になるので，結局アルベドは強制的に 1 になる。

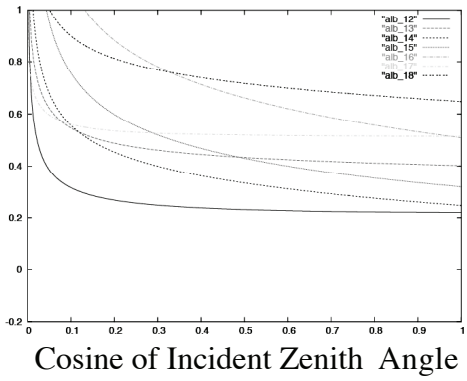


図 3.6.3 アルベドと入射天頂角のコサインの関係。7 種の様々な地表面について示す。

関数 C の積分

一組の (μ_1, μ_0) が与えられたときに関数 $C(\phi)$ を $\phi = 0{-}\pi$ について積分する計算は，アルベドを求める際に複数回実行することになる。従って，出来るだけ高速かつ高精度の求積法が必要である。これにはガウスの求積法を用いることにする。

効率よく積分するため，被積分関数の中の (μ_1, μ_0) に関する項は積分以前に係数として求めておくのがよい。関数 C の式をもう一度書くと，

$$C(\mu_0, \mu_1, \phi) = F(\gamma)\left[1 + \frac{1-\rho_0}{\delta + G}\right] \tag{3.6.74}$$

である。F, G は，

$$F(\gamma) = \frac{1-\Theta^2}{\left[1+\Theta^2+2\Theta\cos\gamma\right]^{3/2}} \tag{3.6.75a}$$

$$G = \frac{\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2 - 2\mu_0\mu_1\cos\gamma}}{\mu_0\mu_1} \tag{3.6.75b}$$

$$\cos\gamma = \mu_0\mu_1 + \sqrt{(1-\mu_0^2)(1-\mu_1^2)}\cos\phi \tag{3.6.75c}$$

であるので，

$$\begin{cases} d_1 = 1-\Theta^2 \\ d_2 = 1+\Theta^2 \\ d_3 = \mu_0\mu_1 \\ d_4 = \sqrt{(1-\mu_0^2)(1-\mu_1^2)} \\ d_5 = \mu_0^2 + \mu_1^2 \end{cases} \tag{3.6.76}$$

と置くと，

$$F(\gamma) = \frac{d_1}{\left[d_2 + 2\Theta\cos\gamma\right]^{3/2}} \tag{3.6.77}$$

$$G = \frac{\sqrt{d_5 - 2d_3\cos\gamma}}{d_3} \tag{3.6.78}$$

$$C(\mu_0, \mu_1, \phi) = \frac{d_1}{\left[d_2 + 2\Theta\cos\gamma\right]^{3/2}}\left[1 + \frac{(1-\rho_0)d_3}{\delta d_3 + \sqrt{d_5 - 2d_3\cos\gamma}}\right] \tag{3.6.79}$$

$$2\cos\gamma = 2\left(d_3 + d_4\cos\phi\right) \tag{3.6.80}$$

と簡略化できる。

ガウスの求積法によって積分すると，

$$\begin{aligned}\overline{C}(\mu_0,\mu_1) &= \int_0^{\pi} C(\mu_0,\mu_1,\phi')d\phi' \\ &= \pi\sum_{i=1}^{N} w_i C\big(\mu_0,\mu_1,\cos\phi(i)\big)\end{aligned} \tag{3.6.81}$$

となる。w は Gauss-Legendre 積分のウェイトである。各積分点における $\cos\phi$ は事前に LUT にしておくのが効率的である。

b. BRDF の計算

BRDF はその式が与えられているので入射方向と反射方向の方向余弦から直接計算することができる。RPV の式をもう一度書き直すと，

$$R(\mu_0,\mu_1,\phi) = \frac{\rho_0}{\pi}\frac{F(\gamma)\big[1+H(G)\big]}{\big[\mu_0\mu_1\big(\mu_0+\mu_1\big)\big]^{1-k}} \tag{3.6.82}$$

これをアルベドで割ると μ_0 に対する強い依存性が消える。(3.6.73) を用いて，

$$\frac{R(\mu_0,\mu_1,\phi)}{\alpha(\mu_0)} = \frac{\rho_0}{\pi A(\mu_0)}\cdot\frac{F(\gamma)\big[1+H(G)\big]}{\big[\mu_1\big(\mu_0+\mu_1\big)\big]^{1-k}} \tag{3.6.83}$$

が得られる。関数 H を再度書くと，

$$H(G) = \frac{1-\rho_0}{\delta+G} \tag{3.6.84a}$$

$$G = \sqrt{\tan^2\theta_0 + \tan^2\theta_1 - 2\tan\theta_0\tan\theta_1\cos\phi} \tag{3.6.84b}$$

である。ここで，

$$\mathbf{\Omega}_0\cdot\mathbf{\Omega}_1 = \mu_0\mu_1 + \sin\theta_0\sin\theta_1\cos\phi \tag{3.6.85}$$

を利用すると，

$$\tan\theta_0 \tan\theta_1 \cos\phi = \frac{\sin\theta_0 \sin\theta_1 \cos\phi}{\mu_0\mu_1} = \frac{\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1}{\mu_0\mu_1} - 1 \tag{3.6.86}$$

が得られる。これと

$$\begin{cases} \tan^2\theta_0 = \dfrac{1-\mu_0^2}{\mu_0^2} = \dfrac{1}{\mu_0^2} - 1 \\ \tan^2\theta_1 = \dfrac{1-\mu_1^2}{\mu_1^2} = \dfrac{1}{\mu_1^2} - 1 \end{cases} \tag{3.6.87}$$

を式 (3.6.84b) に代入すると,

$$G = \sqrt{\frac{1}{\mu_0^2} + \frac{1}{\mu_1^2} - 2\frac{\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1}{\mu_0\mu_1}} = \frac{\sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2 - 2\mu_0\mu_1(\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1)}}{\mu_0\mu_1} \tag{3.6.88}$$

が得られる。結局次の式が得られ，sin/cos/tan の計算を避けることができる。

$$H(G) = \frac{(1-\rho_0)\mu_0\mu_1}{\delta\mu_0\mu_1 + \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2 - 2\mu_0\mu_1(\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1)}} \tag{3.6.89}$$

$$F(\gamma) = \frac{1-\Theta^2}{\left[1 + \Theta^2 + 2\Theta(\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1)\right]^{3/2}} \tag{3.6.90}$$

以上の式を使えば入射方向と反射方向の方向余弦のみから効率的に式 (3.6.83) の計算が可能である。ただし μ_1 が 0 に近いときは注意が必要である。

c. RPV モデルの反射方向の決定アルゴリズム

一組の RPV モデルのパラメータ $\rho_0, k, \Theta, \delta$ が与えられて，モデル領域の中でそれが一定ならば前処理によって(μ_0, μ_1, ϕ) の三次元の LUT を作っておく方法が考えられる。しかし，RPV モデルのパラメータ $\rho_0, k, \Theta, \delta$ が空間的に変化する場合は，($\rho_0, k, \Theta, \delta, \mu_0, \mu_1, \phi$) の 7 次元の LUT になる。これではいくら LUT の格子を粗くしても巨大なメモリが必要になる。また 7 次元の表からの内挿は計算量も大きい。しかも粗い LUT を使うと精度も期待できない。

反射イベントが起きる時点で，($\rho_0, k, \Theta, \delta, \mu_0,$) の 5 つは決まっている。反射方向の決定は μ_1, ϕ の二つを決める問題である。以下で述べるように，μ_1, ϕ 同時に棄却法で決めるアルゴリズムを考える。比較関数としてはできるだけ BR-PDF に近いものが望ましい。

そこで BR-PDF の μ_1 依存性を一次関数で近似する。

比較関数の決定

BR-PDF を一次式で近似すると，以下のように書ける。

$$P(\mu_0,\mu_1,\phi) \approx a_1(\mu_0)\mu_1 + a_0(\mu_0) \tag{3.6.91}$$

ここで例えば等方反射の場合は $P = \mu_1/\pi$ であることを参照して頂きたい。BR-PDF の規格化条件から係数 a_1 は a_0 により決まる。

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[a_1(\mu_0)\mu_1 + a_0(\mu_0)\right] d\mu_1 d\phi = 2\pi\left(\frac{a_1(\mu_0)}{2} + a_0(\mu_0)\right) = 1 \tag{3.6.92a}$$

$$\therefore a_1(\mu_0) = \frac{1}{\pi} - 2a_0(\mu_0) \tag{3.6.92b}$$

これらの係数は関数 B（BRDF を方位角 ϕ について平均したような関数）に一次式を回帰した後，規格化条件式 (3.6.92b) を満たすように決めればよい [(3.6.71−72)参照]。つまり，

$$B(\mu_0,\mu_1) \approx \bar{a}_1(\mu_0)\mu_1 + \bar{a}_0(\mu_0) \tag{3.6.93a}$$

の係数を求める。ただし，比較関数として用いる場合，$\mu_1 = 0{-}1$ の範囲内で常に正の値でなければならない。（途中省略）結局，

$$a_1(\mu_0) = \frac{\bar{a}_1(\mu_0)}{\pi\left(\bar{a}_1(\mu_0) + 2\bar{a}_0(\mu_0)\right)} \tag{3.6.93b}$$

となる。ただし，比較関数は非負でなければならないので，強制的に

$$-\frac{1}{\pi} < a_1(\mu_0) < \frac{1}{\pi} \tag{3.6.93c}$$

の範囲に収める。a_0 は次式で決まる。

$$a_0(\mu_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi} - a_1(\mu_0)\right) \tag{3.6.93d}$$

では式 (3.6.91) を何倍にしたら「全ての点で元の BR-PDF より大きい」比較関数が得

られるのであろうか？ BR-PDF の式,

$$P(\mu_0,\mu_1,\phi) \equiv \frac{R(\mu_0,\mu_1,\phi)\mu_1}{\alpha(\mu_0)} \tag{3.6.94}$$

これを式 (3.6.91) の右辺で割ったものの最大値を考えればよい。比較関数が「全ての点で元の BR-PDF より大きい」という条件を満たすためには，式 (3.6.91) を

$$b(\mu_0) = \max\left\{\frac{\mu_1}{\left[a_1(\mu_0)\mu_1 + a_0(\mu_0)\right]} \cdot \frac{R(\mu_0,\mu_1,\phi)}{\alpha(\mu_0)}\right\} \tag{3.6.95}$$

倍すればよい。関数 max{} は全ての μ_1, ϕ についての最大値である。R/α は式 (3.6.83) で計算できる。RPV モデルの場合上記の最大値は $\phi = 0$ or π の principal plane 上にある。BR-PDFが完全に式 (3.6.91a) のような一次式に比例していればファクターbは1となる。しかし，鋭いピークを持った BRDF の場合は b は大きな値となり，棄却法のために平均 b 回の繰り返し演算が必要になる。そこで b の替わりに,

$$b'(\mu_0) = \begin{cases} b(\mu_0) & \text{if } b(\mu_0) < b_{\min} \\ b_{\min} - 1 + \left[b(\mu_0) - b_{\min} + 1\right]^S & \text{if } b(\mu_0) \geq b_{\min} \end{cases} \tag{3.6.96}$$

を用いることにする。S はチューニングパラメータ定数である。つまり，BR-PDF が一次式から大きくはずれるときはある程度 BR-PDF に近い角度分布で近似してしまうことにする。およそ $b_{\min} = 4$, $S = 0.5$ 程度にすると良い。RPV モデルの場合，幸いにして際だったピークが無いことが多く，大抵は $b = 1$–5 程度である。結局比較関数は,

$$f(\mu_0,\mu_1,\phi) = b'(\mu_0)\left[a_1(\mu_0)\mu_1 + a_0(\mu_0)\right] \tag{3.6.97}$$

となる。

パラメータ a_1, b'は共に (x, y, μ_0) 三次元の LUT にしておく。反射イベントが起きたとき，LUT から μ_0 について内挿して値を求める。比較関数は大雑把に決めても問題ないので，これらの係数は高精度に求める必要はない。式 (3.6.93d) によって a_0 を求める。

棄却法の適用

以下では引数としての μ_0 は省略して書く。式 (3.6.97) の比較関数は

$$f(\mu_1,\phi) = b'\left(a_1\mu_1 + a_0\right) \tag{3.6.98}$$

と書ける。これに従うランダムな μ_1 は,

$$2\pi\int_0^{\mu_1}\left(a_1\mu_1'+a_0\right)d\mu_1'=\rho_{\mu_1} \tag{3.6.99}$$

を解けば決まる。よって，二次方程式

$$a_1\mu_1^2+2a_0\mu_1-\frac{\rho_{\mu_1}}{\pi}=0 \tag{3.6.100}$$

の求根問題となる。これの $\mu_1=0\text{–}1$ の範囲内にある解は,

1) $a_1\neq 0$ のとき,

$$\mu_1=\frac{-a_0+\sqrt{a_0^2+a_1\rho_{\mu_1}/\pi}}{a_1} \tag{3.6.101a}$$

2) $a_1=0$ のとき,

$$\mu_1=\rho_{\mu_1} \tag{3.6.101b}$$

である。一方で方位角は

$$\phi=2\pi\rho_\phi \tag{3.6.102}$$

により容易に求められる。

こうして決めた方向が RPV モデルの BR-PDF に従う確率は

$$\gamma=\frac{P(\mu_1,\phi)}{f(\mu_1,\phi)}=\frac{\mu_1}{b'\left(a_1\mu_1+a_0\right)}\cdot\frac{R(\mu_0,\mu_1,\phi)}{\alpha(\mu_0)} \tag{3.6.103}$$

で与えられる。よって新たに乱数を一個発生させて,

$$\begin{cases}\text{If } \rho<\gamma,\ \text{finish.}\\ \text{If } \rho\geq\gamma,\ \text{rejection.}\end{cases} \tag{3.6.104}$$

を判定する。「棄却」の時はもう一度式 (3.6.101–2) によって方向を決める。以上を繰り返すと近似的に RPV モデルに従う方向を決めることができる。

c. 計算例

実際にいくつかのケースでテスト計算を行った。スピード的には非常に速いことが分かった（Pentium IV 3.6GHz で一秒あたり 60 万回以上の反射イベントを再現できた）。再現される方向を検証してみた結果を次に示す。

以下は BRF の二次元分布をモンテカルロ法と解析的計算で比較したものである。MC 法で決めた方向はほぼ正しい確率分布に従っていることがわかる。

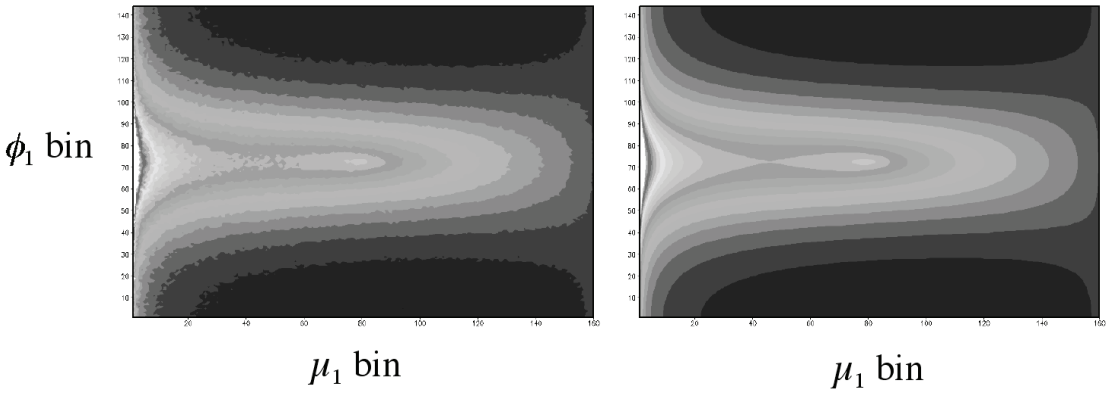


図 3.6.4　RPV モデルの解析的な BRF（左）と MC シミュレーションによる BRF（右）

3.6.6 Li-Sparse-Ross-Thick (LSRT) BRDF model

陸面の BRDF を表現する半経験的なモデルとして Lucht et al. (2000) は Li-Sparse-Ross-Thick (LSRT) linear kernel モデルを提案した。このモデルは現在 MODIS や MISR などの衛星データを用いた地表面パラメータのリトリーバルでも用いられており，また Lyapustin (2002)の SHARM などの放射モデルに組み込まれている。

本稿では LSRT モデルのモンテカルロモデルへの組み込みのため，公式からコード設計まで具体的な部分について述べる。

a. Original formulas of LSRT BRDF

入射ベクトル（下向き）を $\mathbf{\Omega}_0$ で表す（前小節までの定義と異なるので注意）。この天頂角を θ_0 とし，その余弦を $\cos\theta_0 = \mu_0$,方位角を ϕ_0 とする。同様に反射ベクトル（上向

き）$\mathbf{\Omega}_1$ について，θ_0, μ_0, ϕ_0 を定義する。LSRT モデルは三変数の BRDF モデルであり，(3.6.2) の相対方位角を用いて表現される。ここで $-\mu_0 = \mu_1$, $\phi = \pi$ がホットスポットに対応する。

BRDF は次式のように Lambertian と幾何光学，ボリューム散乱の線形の重ね合わせで与えられる。

$$\pi R(\mu_0, \mu_1, \phi) = k_L + k_g f_g(\mu_0, \mu_1, \phi) + k_v f_v(\mu_0, \mu_1, \phi) \tag{3.6.106}$$

ここで，「カーネル関数」は次式のように与えられる。

$$f_v(\mu_0, \mu_1, \phi) = \frac{(\pi/2 - \gamma)\cos\gamma + \sin\gamma}{-\mu_0 + \mu_1} - \frac{\pi}{4} \tag{3.6.107}$$

$$f_g(\mu_0, \mu_1, \phi) = \frac{1}{\pi}(t - \sin t \cos t)\left(\mu_1'^{-1} - \mu_0'^{-1}\right) - \left(\mu_1'^{-1} - \mu_0'^{-1}\right) - \frac{(1 + \cos\gamma')}{2\mu_0'\mu_1'} \tag{3.6.108}$$

これらの関数は方向によっては負の値を持つこともある。ここで γ は位相角であり（入射の逆方向ベクトル $-\mathbf{\Omega}_0$ と反射ベクトル $\mathbf{\Omega}_1$ の間の角度），

$$\cos\gamma = \mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1 = -\left(\mu_0\mu_1 + \sqrt{1-\mu_0^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos\phi\right) \tag{3.6.109a}$$

$$\cos\gamma' = \mathbf{\Omega}_0' \cdot \mathbf{\Omega}_1' = -\left(\mu_0'\mu_1' + \sqrt{1-\mu_0'^2}\sqrt{1-\mu_1'^2}\cos\phi\right) \tag{3.6.109b}$$

で与えられる。角度 t は次式で与えられる。

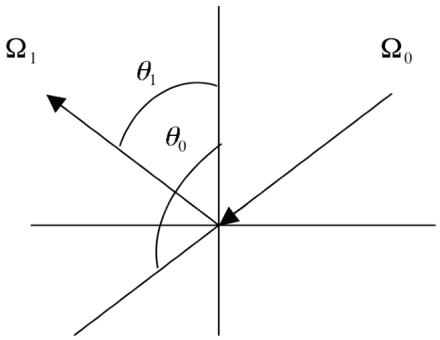


図 3.6.5 方向と角度の定義

$$\cos t = \frac{h}{b}\frac{\sqrt{\tan^2\theta_0' + \tan^2\theta_1' - 2\tan\theta_0'\tan\theta_1'\cos\phi + \tan^2\theta_0'\tan^2\theta_1'\sin^2\phi}}{\mu_1'^{-1} - \mu_0'^{-1}} \tag{3.6.110}$$

ただし $|\cos t| \le 1$ に拘束する。上の (3.6.108–110) の中に出てくるプライムのついた角度は,

$$\tan\theta_0' = \frac{b}{r}\tan\theta_0 \tag{3.6.111a}$$

$$\tan\theta_1' = \frac{b}{r}\tan\theta_1 \tag{3.6.111a}$$

によって定義される。キャノピーの構造パラメータの比は以下の定数とする (Lucht et al., 2000)。

$$b/r = 1 \text{ and } h/b = 2 \tag{3.6.112}$$

よって，BRDF は k_L, k_g, k_v の三つのパラメータによって決まる。

b. Modifications

入射ベクトルが水平に近いとき LSRT モデルは負の値を持ったり, 逆に無限大に発散することがあるので注意を要する。負になるときは 0 にリセットすることにする。また, アルベドが 1 を超えるときには 1 にリセットし, その分 BRDF を小さくすることにする。LSRT モデルのオリジナルの公式は計算負荷の高い三角関数を多数含んでいる。そこで以下では式 (3.6.108) (3.6.110) を方向余弦成分だけから計算できるように変形する。幾何光学カーネル関数 (3.6.108) は,

$$f_g(\mu_0,\mu_1,\phi) = \frac{1}{\mu_0'\mu_1'}\left[\left(1 - \frac{t - \sin t\cos t}{\pi}\right)(\mu_1' - \mu_0') - \frac{1}{2}(1 + \cos\gamma')\right] \tag{3.6.113}$$

と書ける。ここで,

$$\tan\theta_0'\tan\theta_1'\cos\phi = \frac{\sin\theta_0'\sin\theta_1'\cos\phi}{\mu_0'\mu_1'} = -\frac{\cos\gamma'}{\mu_0'\mu_1'} - 1 \tag{3.6.114}$$

$$\tan^2\theta_0' = \frac{1-\mu_0'^2}{\mu_0'^2};\tan^2\theta_1' = \frac{1-\mu_1'^2}{\mu_1'^2} \tag{3.6.115}$$

などを (3.6.110) に代入して整理すると，

$$\cos t = \frac{h}{b}\frac{\sqrt{1-\cos^2\gamma'}}{\mu_1' - \mu_0'} \tag{3.6.116}$$

が得られる。このように f_g と t の計算が簡単になった。ただし，ホットスポットでは，

$$\mathbf{\Omega}_0' = -\mathbf{\Omega}_1' ;\ \mu_0' = -\mu_1' ;\ \cos t = 0 ;\ f_g(\mu_0, \mu_1, \phi) = \frac{1-\mu_1'}{\mu_1'^2}$$

が成り立つ。

式 (3.6.113), (3.6.116) に出てくる方向余弦成分は以下のように求まる。(3.6.111) より，

$$\mu_0' = \mu_0 \Big/ \sqrt{B + (1-B)\mu_0^2} ; B = \left(\frac{b}{r}\right)^2 \tag{3.6.117}$$

$$\mathbf{\Omega}_0 = \begin{pmatrix} \mu_{x0} \\ \mu_{y0} \\ \mu_{z0} \end{pmatrix} ; \mathbf{\Omega}_0' = \frac{1}{\sqrt{B + (1-B)\mu_0^2}} \begin{pmatrix} \mu_{x0} \cdot b/r \\ \mu_{y0} \cdot b/r \\ \mu_{z0} \end{pmatrix} \tag{3.6.118}$$

が成り立つ。添字 1 の変数についても同様である。よって

$$\cos\gamma' = \mathbf{\Omega}_0' \cdot \mathbf{\Omega}_1' = \frac{B(\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1) + (1-B)\mu_0\mu_1}{\sqrt{\left[B + (1-B)\mu_0^2\right]\left[B + (1-B)\mu_1^2\right]}} \tag{3.6.119}$$

が得られる。

計算手順としてはまず (3.6.119) の内積 $\mathbf{\Omega}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_1$ を求める。(3.6.118) よりプライムのついた方向ベクトル二つを求め，次にその内積を求める。これらを (3.6.116) に代入して cos$t$, sin$t$, t を求め，(3.6.113) より f_g を得る。また (3.6.107) より f_v を計算し，結局 (3.6.106) より BRDF を求める。

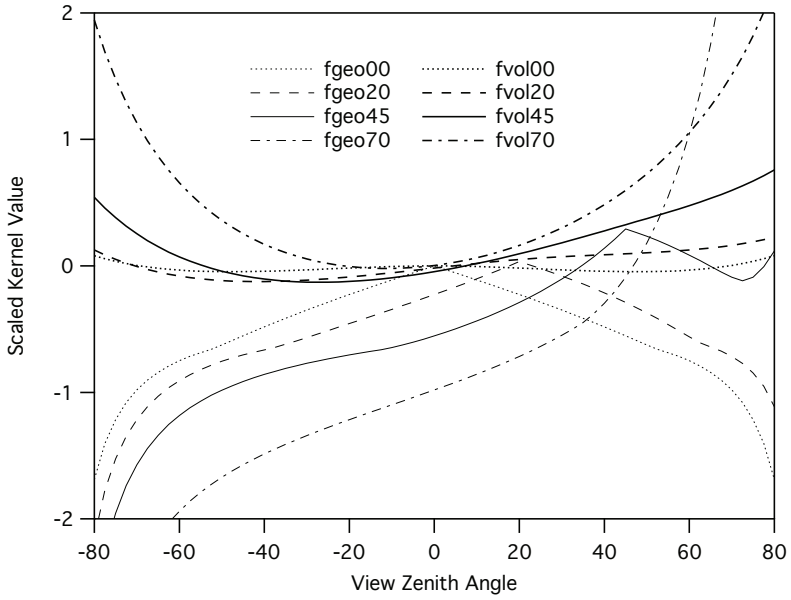


図 3.6.6 カーネル関数（Lucht et al. 2000 の Fig. 2 と同じ）

c. LSRT モデルのアルベド

アルベドは定義式に従って，

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mu_0) &= \int_0^1 d\mu_1 \int_0^{2\pi} d\phi R(\mu_0,\mu_1,\phi)\mu_1 \\
&= 2\int_0^1 d\mu_1 \mu_1 \int_0^{\pi} d\phi R(\mu_0,\mu_1,\phi) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 d\mu_1 \mu_1 \int_0^{\pi} d\phi \Big(k_L + k_g f_g(\mu_0,\mu_1,\phi) + k_v f_v(\mu_0,\mu_1,\phi)\Big) \\
&= k_L + k_g A_g(\mu_0) + k_v A_v(\mu_0)
\end{aligned}
\tag{3.6.120}
$$

と書ける。ただしアルベドは 0 以上 1 以下でなければならない。ここで，A_g, A_v は幾何光学，ボリューム散乱それぞれに対応するアルベドのカーネル関数であり，

$$
\begin{aligned}
A_g(\mu_0) &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 d\mu_1 \mu_1 \int_0^{\pi} d\phi f_g(\mu_0,\mu_1,\phi) \\
A_v(\mu_0) &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 d\mu_1 \mu_1 \int_0^{\pi} d\phi f_v(\mu_0,\mu_1,\phi)
\end{aligned}
\tag{3.6.121}
$$

と定義される。これらの関数は図 3.6.7 のように負の値も持ちうる。これらの関数は数値積分により計算し，μ_0 についての LUT にしておく。RPV モデルなどのようにピクセル毎に LUT を用意する必要がないことは LSRT モデルの一つの特徴である。

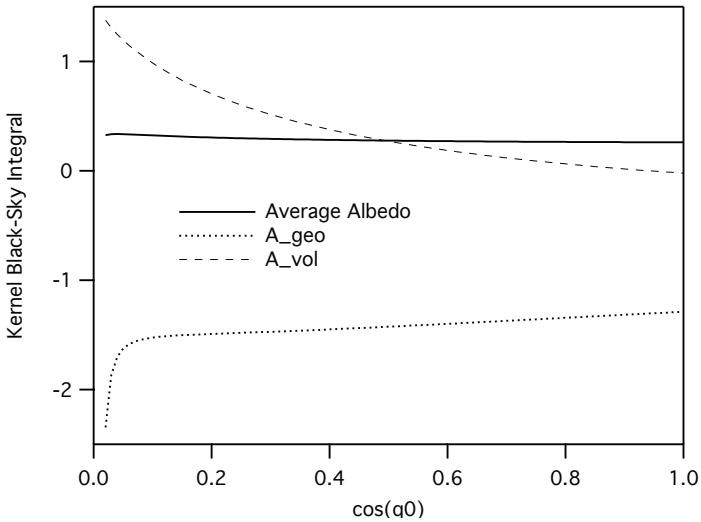


図 3.6.7 アルベドのカーネル関数（Lucht et al. 2000 の Fig. 4 に同じ）。”alb_N98”は $(k_L, k_g, k_v) = (0.3, 0.07, 0.03)$ の時のアルベド。

d. LSRT モデルの反射方向の決定

ここでは μ_1, ϕ 同時に棄却法で求める方法を考える。以下は基本的に RPV モデルの場合と同様である。比較関数としてはできるだけ BR-PDF に近いものが望ましい。

比較関数の決定

BR-PDF を方位角依存性を無視して一次式で近似すると，以下のように書ける。

$$P(\mu_0, \mu_1, \phi) \equiv R(\mu_0, \mu_1, \phi)\mu_1 / \alpha(\mu_0) \tag{3.6.122a}$$

$$P(\mu_0, \mu_1, \phi) \approx a_1(\mu_0)\mu_1 + a_0(\mu_0) \tag{3.6.122b}$$

ここで例えば等方反射の場合は $P = \mu_1/\pi$ であることを参照して頂きたい。BR-PDF の規格化条件から係数 a_1 は a_0 により決まる。

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[a_1(\mu_0)\mu_1 + a_0(\mu_0)\right] d\mu_1 d\phi = 2\pi\left(\frac{a_1(\mu_0)}{2} + a_0(\mu_0)\right) = 1 \tag{3.6.123a}$$

$$\therefore a_0(\mu_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi} - a_1(\mu_0)\right) \tag{3.6.123b}$$

これらの係数を決めるためにまず以下の回帰式の係数を求める。

$$
\begin{aligned}
\overline{P}(\mu_0,\mu_1) &\equiv \mu_1 \int_0^{\pi} R(\mu_0,\mu_1,\phi)d\phi \\
&= \mu_1 \int_0^{\pi} \Big(k_L + k_g f_g(\mu_0,\mu_1,\phi) + k_v f_v(\mu_0,\mu_1,\phi)\Big)d\phi \\
&= \mu_1 \Big[k_L \pi + k_g \int_0^{\pi} f_g(\mu_0,\mu_1,\phi)d\phi + k_v \int_0^{\pi} f_v(\mu_0,\mu_1,\phi)d\phi\Big] \\
&\approx \overline{a}_1(\mu_0)\mu_1 + \overline{a}_0(\mu_0)
\end{aligned}
\tag{3.6.124}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\bar{f}_g(\mu_0,\mu_1) &= \int_0^{\pi} f_g(\mu_0,\mu_1,\phi)d\phi \\
\bar{f}_v(\mu_0,\mu_1) &= \int_0^{\pi} f_v(\mu_0,\mu_1,\phi)d\phi
\end{aligned}
\tag{3.6.125}
$$

と置いてこれらはあらかじめ LUT を用意しておく。求める回帰式は,

$$
\mu_1\Big[k_L \pi + k_g \bar{f}_g(\mu_0,\mu_1) + k_v \bar{f}_v(\mu_0,\mu_1)\Big] \approx \overline{a}_1(\mu_0)\mu_1 + \overline{a}_0(\mu_0) \tag{3.6.126}
$$

と書ける。これより,

$$
\frac{a_0(\mu_0)}{a_1(\mu_0)} = \frac{\overline{a}_0(\mu_0)}{\overline{a}_1(\mu_0)} \tag{3.6.127}
$$

の比が求まる。規格化条件式 (3.6.123), (3.6.127) より,

$$
a_1(\mu_0) = \frac{\overline{a}_1(\mu_0)}{\pi\big(\overline{a}_1(\mu_0) + 2\overline{a}_0(\mu_0)\big)} \tag{3.6.128}
$$

が得られる。ただし, (3.6.122) を比較関数として用いる場合, $\mu_1 = 0{-}1$ の範囲内で常に正の値でなければならない。従って強制的に

$$
-\frac{1}{\pi} < a_1(\mu_0) < \frac{1}{\pi} \tag{3.6.129}
$$

の範囲に収める (経験的にはもう少し狭い範囲に収めた方が良い)。一方 a_0 は (3.6.123b) で決まる。

比較関数が「全ての点で元の BR-PDF より大きい」という条件を満たすためには, 式 (3.6.122) を

$$b(\mu_0) = \max\left\{ \frac{\mu_1}{\left[a_1(\mu_0)\mu_1 + a_0(\mu_0)\right]} \cdot \frac{R(\mu_0, \mu_1, \phi)}{\alpha(\mu_0)} \right\} \tag{3.6.130}$$

倍すればよい。関数 max{} は全ての μ_1, ϕ についてである。鋭いピークを持った BRDF の場合は b は大きな値となり，棄却法のために平均 b 回の繰り返し演算が必要になる。そこで b の替わりに，

$$b'(\mu_0) = \begin{cases} b(\mu_0) & \text{if } b(\mu_0) < b_{\min} \\ b_{\min} - 1 + \left[b(\mu_0) - b_{\min} + 1\right]^S & \text{if } b(\mu_0) \geq b_{\min} \end{cases} \tag{3.6.131}$$

を用いることにする。S はチューニングパラメータである。つまり，BR-PDF が一次式から大きくはずれるときはある程度 BR-PDF に近い角度分布で近似してしまうことにする。およそ $b_{\min} = 4, S = 0.5$ 程度にすると良い。RPV モデルの場合，幸いにして際だったピークが無いことが多く，大抵は $b = 1\text{–}5$ 程度である。結局比較関数は，

$$h(\mu_0, \mu_1, \phi) = b'(\mu_0)\left[a_1(\mu_0)\mu_1 + a_0(\mu_0)\right] \tag{3.6.132}$$

となる。

ピクセル毎に k_*のパラメータが変化する場合, 各ピクセルについて上の係数を求めなければならない。パラメータ a_1, b'は共に (x, y, μ_0) 三次元の LUT にしておく。反射イベントが起きたとき，LUT から μ_0 について内挿して値を求める。比較関数は大雑把に決めても問題ないので，これらの係数は高精度に求める必要はない。

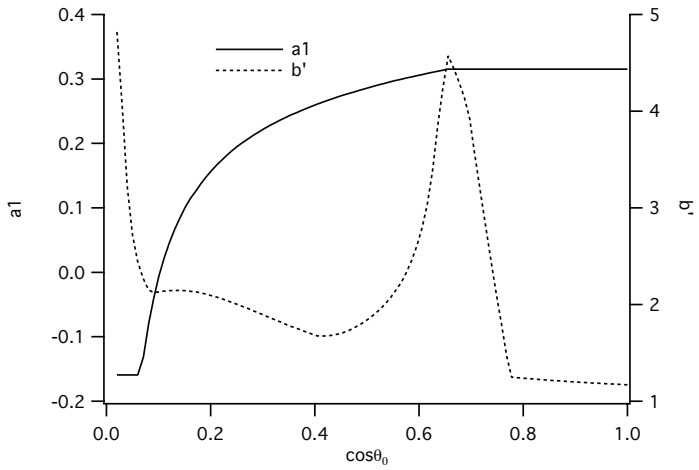


図 3.6.8 パラメータ a_1, b'の入射角分布。$(k_L, k_g, k_v) = (0.3, 0.07, 0.03)$ の時の例。

棄却法

以下では引数としての μ_0 は省略して書く。式 (3.6.132) の比較関数は

$$h(\mu_1,\phi)=b'\left(a_1\mu_1+a_0\right) \tag{3.6.133}$$

と書ける。式 (3.6.123) のように関数 $a_1\mu_1+a_0$ が規格化されていることから，関数 h に従うランダムな μ_1 は,

$$2\pi\int_0^{\mu_1}\left(a_1\mu_1+a_0\right)d\mu_1=\rho_{\mu_1} \tag{3.6.134}$$

を解けば決まる。よって，二次方程式

$$a_1\mu_1^2+2a_0\mu_1-\frac{\rho_{\mu_1}}{\pi}=0 \tag{3.6.135}$$

の求根問題となる。これの $\mu_1=0\text{–}1$ の範囲内にある解は,

$a_1\neq 0$ のとき,

$$\mu_1=\frac{-a_0+\sqrt{a_0^2+a_1\rho_{\mu_1}/\pi}}{a_1} \tag{3.6.136a}$$

$a_1=0$ のとき,

$$\mu_1=\rho_{\mu_1} \tag{3.6.136b}$$

である。一方で方位角は

$$\phi=2\pi\rho_\phi \tag{3.6.137}$$

により容易に求められる。

こうして決めた方向が LSRT モデルの BR-PDF に従う確率は

$$\eta=\frac{P(\mu_1,\phi)}{h(\mu_1,\phi)}=\frac{\mu_1}{b'\left(a_1\mu_1+a_0\right)}\cdot\frac{R(\mu_0,\mu_1,\phi)}{\alpha(\mu_0)} \tag{3.6.138}$$

で与えられる。よって新たに乱数を一個発生させて,

$$\begin{cases}\text{If } \rho<\eta,\ \text{finish.}\\ \text{If } \rho\geq\eta,\ \text{rejection.}\end{cases} \tag{3.6.139}$$

を判定する。「棄却」の時はもう一度式 (3.6.136–137) によって方向を決める。以上を繰り返すと近似的に LSRT モデルに従う方向を決めることができる。

e. 計算例

計算手順としては以下のようになる。

1) 準備：LUT などの作成
   - アルベドのカーネル関数 A_g, A_v の LUT を作成
   - 比較関数の係数 a_1, b' の LUT を作成
   - 熱放射が有る場合は平面射出率を求める。
2) モンテカルロシミュレーション：反射イベント
   - LUT から関数 A_g, A_v や係数 a_1, b' の内挿して求める
   - アルベドを求める
   - ウェイトのスケーリング（ただしアルベドは最大 1）
   - LEM: R/α を計算
   - 反射方向の決定
3) モンテカルロシミュレーション：熱放射の射出イベント
   - LEM: 射出率をは LUT 内挿によって求める
   - 射出方向の決定

実際にいくつかのケースでテスト計算を行った。Pentium IV 3.6GHz で一秒あたり 60 万回以上の反射イベントを再現できた。再現される方向を検証してみた結果を次に示す。

以下は BRF の二次元分布をモンテカルロ法と解析的計算で比較したものである。MC 法で決めた反射方向はほぼ正しい確率分布に従っていることがわかる。

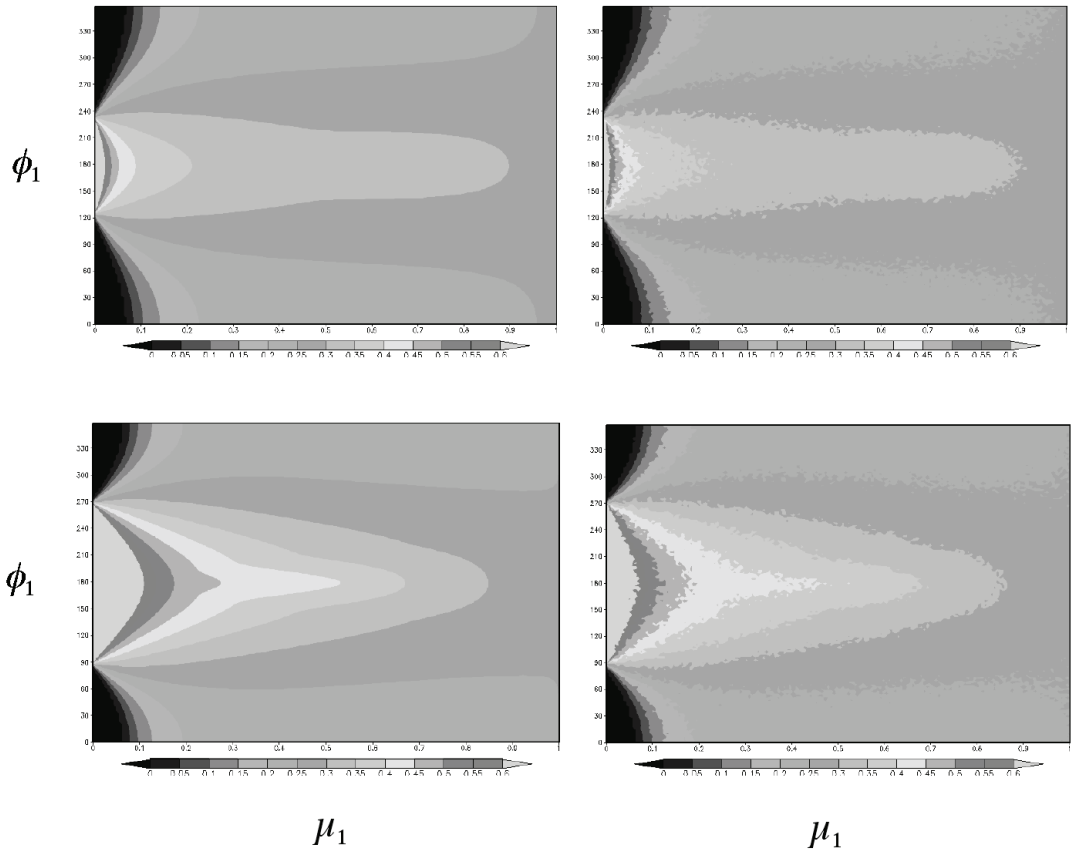


図 3.6.9　BRF の角度分布図。上の二つは太陽天頂角 45 度，下の二つは 60 度の場合。左は解析的な計算値，右はモンテカルロシミュレーションによる計算値。

3.7 屈折

密度の異なる媒質の境界に光が入射するとき屈折と反射が起きる。または屈折率が連続的に変化する媒質中を光が進むときにも同じ現象が見られる。これらの現象は海面での鏡面反射や地球大気での特に光が水平に近い角度で進行するときの屈折（蜃気楼などの光学現象を説明する）を記述するのに重要である。基本的にこれらの現象はスネルの法則とフレネルの式で記述される。本稿では無偏光の光の強度をモンテカルロ法で再現するための式やアルゴリズムについて述べる。

3.7.1 スネルの法則とフレネルの式

図 3.7.1 のように密度の異なる媒質の境界において屈折・反射するとき，入射ベクトルを $\mathbf{\Omega}_0$ で表し，この逆方向の天頂角を θ_0 とし，その余弦を $\cos\theta_0 = \mu_0$ とする。同様に反射・屈折（透過）ベクトル $\mathbf{\Omega}_R$, $\mathbf{\Omega}_T$ についても定義する。ここで媒質間の屈折率の比 m について，スネルの法則：

$$m = \frac{n_1}{n_0} = \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_T} \tag{3.7.1}$$

が成り立つ。反射・屈折ベクトルについて，

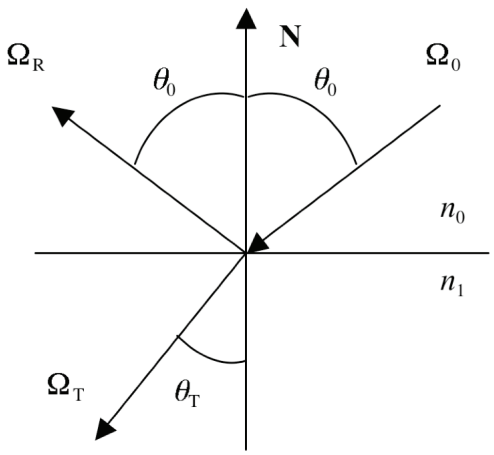


図 3.7.1 方向と角度の定義

$$\mathbf{\Omega}_R = 2\cos\theta_0\mathbf{N} + \mathbf{\Omega}_0 \tag{3.7.2a}$$

$$\mathbf{\Omega}_T = \frac{n_0}{n_T}\left(\mathbf{\Omega}_0 + \cos\theta_0\mathbf{N}\right) - \cos\theta_T\mathbf{N} \tag{3.7.2b}$$

が成り立つ。屈折率の高い媒質から低い媒質へ大きな入射角で入射するときは全反射という現象が起こる。この場合屈折はせず反射のみが起きる。そのための条件は

$$\sin\theta_0 < m \tag{3.7.3}$$

である。

無偏光放射輝度のフレネル反射率 R_F はフレネルの式より次式で与えられる。

$$R_F = \frac{1}{2}\left(r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2\right) \tag{3.7.4}$$

吸収を考慮して修正したフレネル係数は（Liou, 1992），

$$r_{\parallel}^2 = \frac{\left[(n^2-k^2)\cos\theta_0 - U\right]^2 + \left[2nk\cos\theta_0 - V\right]^2}{\left[(n^2-k^2)\cos\theta_0 + U\right]^2 + \left[2nk\cos\theta_0 + V\right]^2} \tag{3.7.5a}$$

$$r_{\perp}^2 = \frac{\left(\cos\theta_0 - U\right)^2 + V^2}{\left(\cos\theta_0 + U\right)^2 + V^2} \tag{3.7.5b}$$

で与えられる。ここで，n, k は屈折率の実部と虚部であり，

$$m = n + ik \tag{3.7.6}$$

$$U^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{G^2 + 4n^2k^2} + G\right) \tag{3.7.7a}$$

$$V^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{G^2 + 4n^2k^2} - G\right) \tag{3.7.7b}$$

$$G = n^2 - k^2 - \sin^2\theta_0 \tag{3.7.8c}$$

である。

吸収がない場合（$k = 0$）は，(3.7.5) は以下のように簡単になる。

$$r_{\parallel} = \frac{n^2\cos\theta_0 - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}}{n^2\cos\theta_0 + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}} \tag{3.7.9a}$$

$$r_{\perp} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0} - \cos\theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0} + \cos\theta_0} \tag{3.7.9b}$$

$$\frac{r_{\parallel}}{r_{\perp}} = \frac{\cos\theta_0\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0} - \sin^2\theta_0}{\cos\theta_0\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0} + \sin^2\theta_0} \tag{3.7.9c}$$

3.7.2 地球大気中の屈折の扱い方

地球大気では吸収はない ($k = 0$) と考えることができる。屈折率は空気密度に比例し，大気組成の関数でもある。屈折率 n は 1 に近く地表付近の大気では $1 - n$ は 0.0001 のオーダーである。屈折率は高度に対して連続な関数として扱うこともできるがこの節では大気を均質な層に区切り，それらの層境界においてのみ屈折が起きると考えることにする。以下ではモンテカルロシミュレーションに便利なように前述の式を変形する。Marchuk et al. (1980) にも同様の記述がある。

反射ベクトルの方向余弦は，(3.7.2a) より

$$\begin{pmatrix} u_{xR} \\ u_{yR} \\ u_{zR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \\ -u_{z0} \end{pmatrix} \tag{3.7.10}$$

である。屈折率の比を

$$n = \frac{n_1}{n_0} \tag{3.7.11}$$

とするとき，屈折ベクトルの方向余弦は，(3.7.2b) より

$$\begin{pmatrix} u_{xT} \\ u_{yT} \\ u_{zT} \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} u_{x0} \\ u_{y0} \\ \sqrt{u_{z0}^2 + n^2 - 1} \end{pmatrix} \tag{3.7.12}$$

である。ただし，(3.7.3) の全反射の条件より，

$$u_{z0}^2 + n^2 - 1 < 0 \tag{3.7.13}$$

が成り立つときは屈折はない (反射率は 1)。屈折率の小さい層から大きい層へ入射する

とき ($n > 1$)，反射率は (3.7.9), (3.7.12),より，

$$R_F = \left(\frac{u_{z0} - B}{u_{z0} + B}\right)^2 \frac{u_{z0}^2 B^2 + A^2}{\left(u_{z0} B + A\right)^2} \tag{3.7.14}$$

$$\begin{aligned} A &= 1 - u_{z0}^2 = u_{x0}^2 + u_{y0}^2 \\ B &= \sqrt{u_{z0}^2 + n^2 - 1} \end{aligned} \tag{3.7.15}$$

である。逆に屈折率の大きい層から小さい層に入射するときは ($n < 1$),

$$R_F' = \frac{n^2 - 1 + R_F}{n^2} \tag{3.7.16}$$

である。

屈折率 n がほぼ 1 であることに注意すると，1 からの偏差 Δn をパラメータに考えた方が数値計算上都合が良い。

$$n = 1 + \Delta n \tag{3.7.17}$$

として，

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\cong 1 - \Delta n(1 - \Delta n) \\ \frac{1}{n^2} &\cong 1 - \Delta n(2 - 3\Delta n) \\ n^2 - 1 &= \Delta n(2 + \Delta n) \end{aligned}$$

が利用できる。これらは (3.7.12–16) の計算で活用できる。

モンテカルロ法で屈折を扱うには光子が層の境界に入射するときにまず反射率を (3.7.14) or (3.7.16) により求める。ただし地球大気では反射率は非常に小さいことが多い。反射率と乱数を比較し，反射か屈折を決定する。反射または屈折の後の方向はそれぞれ (3.7.10), (3.7.12) で与えられる。

3.7.3 地球大気の屈折率

大気の屈折率は一般に大気組成と大気分子の数濃度の関数である。

$$\Delta n \equiv n - 1$$
$$= (n_s - 1)\frac{N}{N_s} = (n_s - 1)\frac{P}{P_s}\frac{T_s}{T} \tag{3.7.18}$$

ここで，N, P, T はそれぞれ大気分子の数濃度，気圧，温度である。添字の s は標準大気を表す。乾燥した（水蒸気のない）標準大気を考えると，アボガドロ数を N_A = 6.0221367x10^{23} [#/mol], 気体状数 (universal gas constant)を R^* = 8.3143 J K^{-1} mol^{-1} として，

$$N_s = \frac{N_A}{R^*} \cdot \frac{P_s}{T_s} \tag{3.7.19}$$

である。

乾燥した標準大気の波長 λ (μm) の屈折率は実験データに基づき以下のような経験式が与えられている。

Edlén (1953):

$$(n_s - 1) \times 10^{-8} = 6432.8 + \frac{2949810}{146 - \lambda^{-2}} + \frac{25540}{41 - \lambda^{-2}} \tag{3.7.20}$$
$$P_s = 1013.25 \text{ hPa},\ T_s = 288.15 \text{ K},\ 300 \text{ ppm } CO_2$$

Peck and Reeder (1972):

$$(n_s - 1) \times 10^{-8} = 8060.51 + \frac{2480990}{132.274 - \lambda^{-2}} + \frac{17455.7}{39.32957 - \lambda^{-2}} \tag{3.7.21}$$
$$P_s = 1013.25 \text{ hPa},\ T_s = 288.15 \text{ K},\ 300\ (330?) \text{ ppm } CO_2$$

CO_2 濃度 (parts per volume, e.g., 360x10–6 for 360 ppm) の補正式は，

$$\frac{(n_s - 1)_{CO_2}}{(n_s - 1)_{300}} = 1 + 0.54(CO_2 - 0.0003) \tag{3.7.22}$$

である (Edlén (1953))。通常は乾燥空気を考えて，水蒸気の効果は無視することが多い。

3.8 放射照度と加熱率の計算

フォワード型のモンテカルロモデルでは，三次元空間の様々な場所の面積平均放射照度や各セルの体積平均加熱率を一回のシミュレーションから得ることができる。

3.8.1 放射量の定義とモンテカルロ法によるサンプリング

放射照度 (Irradiance)

任意の方向 $\mathbf{\Omega}_c$ を向いた平面上の任意の位置 $\mathbf{r}$ における放射照度（単位 W m^{-2}）は，放射輝度 I（単位 W m^{-2} str^{-1}）の平面に対する投影成分を半球の角度領域について積分したものである。

$$F(\mathbf{\Omega}_c, \mathbf{r}) = \int_{2\pi} I(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) |\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}_c| d\mathbf{\Omega} \tag{3.8.1}$$

特殊な場合として，水平面における放射照度は，

$$F^{\pm}(\mathbf{r}) = \int_{2\pi} I^{\pm}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) |\cos\theta| d\mathbf{\Omega} \tag{3.8.2}$$

である。ここで，θ は天頂角，上付きの符号は上向き・下向きを表している。

Spheradiance

任意の位置 $\mathbf{r}$ における spheradiance（単位 W m^{-2}）は，放射輝度 I（単位 W m^{-2} str^{-1}）を全球の角度領域について積分したものである。Actinic flux or mean radiance とも呼ばれる。植物の光合成量や生物が浴びる紫外線量の評価には irradiance よりも spheradiance の方が有効である。

$$S(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} I(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}) d\mathbf{\Omega} \tag{3.8.3}$$

式 (3.8.1) との違いは特定の面に対する射影を考えていないことである。

放射加熱率 (radiative heating rate)

放射加熱率 $H(\mathbf{r})$（単位：W m^{-3}）とは，単位体積あたりの放射エネルギーの収束量（吸収量）である。冷却の場合は負である。

面積平均放射照度と体積平均放射照度

ある有限な面積 A をもつ領域 $\mathbf{R}_A$ について平均した水平面放射照度，および体積 V をもつ領域 $\mathbf{R}_V$ について平均した加熱率を考える。

$$\overline{F}^{\pm}(\mathbf{R}_A) = \frac{1}{A}\int F^{\pm}(\mathbf{r})dA \tag{3.8.4}$$

$$\overline{H}(\mathbf{R}_V) = \frac{1}{V}\int H(\mathbf{r})dV \tag{3.8.5}$$

以下ではモンテカルロモデルでこれらの放射量を計算する方法について述べる。

放射量のサンプリング

モンテカルロモデルで (3.8.4–5) の放射量を計算する場合，領域 $\mathbf{R}_A$ または $\mathbf{R}_V$ にモデル光子の位置 $\mathbf{r}$ が含まれるときに何らかのサンプリング量を積算する。放射照度と加熱率は以下のように全てのモデル光子の全てのサンプリング量 ψ または η を積算した形に書ける。

$$\overline{F}^{\pm}(\mathbf{R}_A) = \frac{E_1}{A}\sum_{p=0}^{N}\sum_{s=0}^{\alpha(p)}\psi_{p,s}(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) \tag{3.8.6}$$

$$\overline{H}(\mathbf{R}_V) = \frac{E_1}{V}\sum_{p=0}^{N}\sum_{s=0}^{\beta(p)}\eta_{p,s}(\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) \tag{3.8.7}$$

ここで，N はモデル光子の総数，α, β は最大サンプリング回数である。E_1 はウェイトが 1 のモデル光子一個が輸送する放射エネルギー (単位: W) である。

$$E_1 = \frac{E_{\mathrm{tot}}}{N} \tag{3.8.8}$$

が成り立つ。E_{tot} は全ての放射源から射出される総エネルギー（正確には射出エネルギーの水平面投影成分）である。以降で述べるようにどういう条件でどのような量をサンプリングするかについて様々な方法が考えられる。

以下では水平面放射照度と加熱率に限定して議論する。任意の方向を向いた面上の放射照度や spheradiance についても同様の空間平均量を考えてモンテカルロモデルで計算することは可能である。

3.8.2 方法 I: 透過率のランダムサンプリング

3.4 節で述べたように散乱を再現するためにはランダムに選んだ透過率によって衝突点までの光学的厚さを決める。吸収と散乱をあわせて「衝突」を再現する場合は，その衝突点までは透過率が 1 で，衝突点で透過率が突然 0 に変わることになる。つまり，解析的透過率

$$T(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)=\mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)} \tag{3.8.10}$$

を

$$T(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)=\begin{cases}1 & \text{for } \tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)\le -\ln\rho \\ 0 & \text{for } \tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)> -\ln\rho\end{cases} \tag{3.8.11}$$

と変形していることになる。衝突点において吸収（加熱）される確率は $1-\omega$ で与えられる（ω は一次散乱アルベド）。

放射照度と加熱率を計算する場合，上の式のようにランダムに決めた透過率に基づいて計算する方法が考えられる。放射照度については，始点から衝突点までのパスの途中でモデル光子が領域 $\mathbf{R}_A$ に入射したときに，以下の量をサンプリングする。

$$\psi = w \tag{3.8.12}$$

w は始点におけるモデル光子のウェイトである。加熱率については，衝突点が領域 $\mathbf{R}_V$ に含まれていれば，以下の量をサンプリングする。

$$\eta = w(1-\omega) \tag{3.8.13}$$

しかし加熱率を混合媒体の構成要素（ガス，エーロゾル，または雲など）別に計算したい場合もある。この場合は各構成要素の吸収係数に比例するように(3.8.13)のウェイトを割り振る。または乱数を一個発生させどの要素による吸収なのかをランダムに決める。

この方法は単純でコーディングも容易である。しかし，加熱率は衝突点でしかサンプリングされないため，光学的に薄い媒体ではサンプリング頻度が低く，効率的ではな

い。そのような場合は衝突強制法（4.2 節）の利用が有効である。

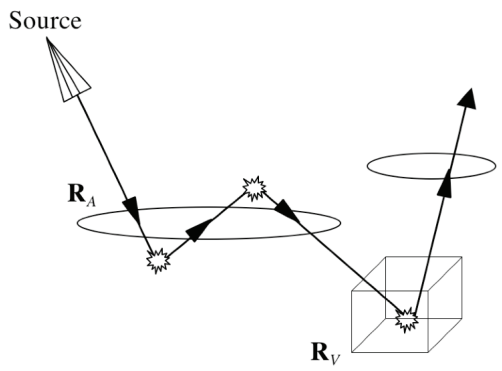


図 3.8.1 放射照度と加熱率のサンプリング法 I の概念図

3.8.3 方法 II: 透過率の解析的サンプリング

解析的透過率 (3.8.10) をそのままサンプリングに使うこともできる。この方法では射出・散乱・反射のイベントが起きる度にそのイベントが起きた点 $\mathbf{r}_0$ からモデル領域の上限または下限まで「仮想的な軌跡」をトレースして，その途中で放射量をサンプリングする。透過率はモデル光子の軌跡の始点 $\mathbf{r}_0$ からの光学的距離 τ の関数であり，放射照度のサンプリング量は,

$$\psi(\mathbf{r}) = wT(\mathbf{r}) = w\,\mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r})} \tag{3.8.14}$$

で与えられる。軌跡の途中で加熱率を計算したいボリュームを位置 $\mathbf{r}$ から $\mathbf{r}'$の区間で通過するとき，加熱率のサンプリング量は,

$$\begin{aligned}\eta(\mathbf{r} \to \mathbf{r}') &= w\left[T(\mathbf{r}) - T(\mathbf{r}')\right]\left[1 - \omega(\tilde{\mathbf{r}})\right] \\ &= w\,\mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r})}\,C\left(\tau(\mathbf{r}') - \tau(\mathbf{r})\right)\left[1 - \omega(\tilde{\mathbf{r}})\right]\end{aligned} \tag{3.8.15}$$

である。ここで $\tilde{\mathbf{r}}$ は加熱率がサンプリングされる点であり，$C(x)$ は光学的距離 x の区間で衝突が起きる確率

$$C(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \tag{3.8.16}$$

である。サンプリング点 $\tilde{\mathbf{r}}$ は以下の式によりランダムに決まる。

$$C\big(\tau(\tilde{\mathbf{r}})-\tau(\mathbf{r})\big)=\rho C\big(\tau(\mathbf{r}')-\tau(\mathbf{r})\big) \tag{3.8.17}$$

ただし，**r** から **r**'の区間内の一次散乱アルベドが一定であればわざわざこの点を決める必要はない。

「物理的な軌跡」はランダムに決めた衝突点で終了するが，放射量のサンプリングの過程ではその衝突点からさらに延長した「仮想的な軌跡」をトレースすることになる（図 3.8.2 参照）。原理的に光学的距離が無限大になる所まで放射量をサンプリングできるので，例えば放射源からの光学的距離が非常に大きい位置における放射量を計算したい場合などにも高い頻度でサンプリングされることになり便利である。

サンプリング量を解析的に決めているため高精度が期待できる反面，負荷の高いレイトレーシングを必要とし，しかも (3.8.14–15) のサンプリングの度に負荷の高い指数関数を計算しなければならない。計算効率を方法 I と比べた場合その優劣は，媒体の消散係数やその不均質性，幾何学的構造の複雑さ，興味のある放射量が何であるかなど様々な条件に依存する。方法 I では加熱率が衝突点でしかサンプリングされないのに対し，方法 II ではパスの途中の複数の点でサンプリングされる。光学的に薄い媒体で加熱率を計算する場合は方法 II の方が高い効率となる傾向がある。

空間分割されたボリューム要素をモデル光子が通過する度にその要素内での幾何学的・光学的パスの長さを計算しなければならない。従って後述する最大消散係数法（4.1 節）を使うことができない。空間が非常に細かい多数の要素に分割されている場合には非効率的な方法である。

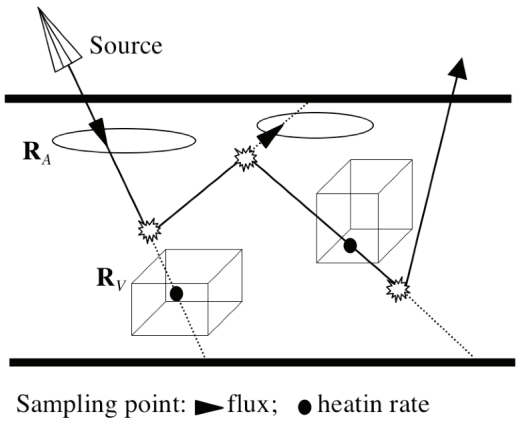


図 3.8.2 放射照度と加熱率のサンプリング法 II の概念図

3.8.4 方法 III: ハイブリッド法

方法 I と方法 II を組み合わせた方法を考えられる。透過率はある閾値 $T_{\min}$ まで解析的に扱い，それ以降（τ がより大きい領域）はモンテカルロ流にランダムに扱う。

$$T(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r})} & \text{for } \tau(\mathbf{r}) \le \tau_{\max} \\ \mathrm{e}^{-\tau_{\max}} & \text{for } \tau_{\max} < \tau(\mathbf{r}) \le \tau_{\max} + \tau_{\mathrm{free}} \\ 0 & \text{for } \tau_{\max} + \tau_{\mathrm{free}} < \tau(\mathbf{r}) \end{cases} \tag{3.8.18}$$

ここで,

$$T_{\min} = \mathrm{e}^{-\tau_{\max}} \tag{3.8.19a}$$

$$\tau_{\mathrm{free}} = -\ln \rho \tag{3.8.19b}$$

である。透過率を図にすると図 3.8.3 のようになる。このようにすると光学的厚さが $\tau_{\max}$ までは必ずトレースすることになるが，方法 II のように無限大までトレースする必要はなくなる。

放射照度と加熱率のサンプリング量は，それぞれ

$$\psi(\mathbf{r}) = wT(\mathbf{r}) \tag{3.8.20}$$

$$\eta(\mathbf{r} \to \mathbf{r}') = w\left[T(\mathbf{r}) - T(\mathbf{r}')\right]\left[1 - \omega(\tilde{\mathbf{r}})\right] \tag{3.8.21}$$

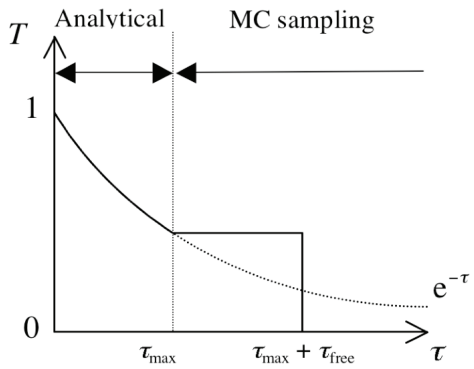


図 3.8.3 方法 III における透過率

で与えられる。加熱率がサンプリングされる点$\tilde{\mathbf{r}}$の決め方は方法 II のときと同様に乱数によって決める。

$$T\left(\tau(\mathbf{r})\right)-T\left(\tau(\tilde{\mathbf{r}})\right)=\alpha\left[T\left(\tau(\mathbf{r})\right)-T\left(\tau(\mathbf{r}')\right)\right] \tag{3.8.22}$$

r から **r**'の区間内の一次散乱アルベドが一定であればわざわざ点$\tilde{\mathbf{r}}$を決める必要はない。

さらに，散乱次数によってサンプリング方法を使い分けるのも可能である。例えば直達光の放射照度と一次散乱の加熱率をハイブリッド法で半解析的にサンプリングし，散乱光の放射照度と複次散乱の加熱率は方法 I で計算するという方法が考えられる。

3.8.5 方法 IV: 吸収のみ解析的に扱う方法

3.4 節で述べたように散乱のみを「衝突」としてモンテカルロ流に扱い，吸収は解析的に扱うことができる。この場合，衝突が起きる点は散乱係数の分布で決まり，モデル光子の生存確率はモデル光子が走った距離に応じて決まる。透過率は「吸収の光学的厚さ」τ_{a}の関数となり，

$$T(\mathbf{r})=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\tau_{\mathrm{a}}(\mathbf{r})} & \text{for } \tau_{\mathrm{s}}(\mathbf{r})\le\tau_{\mathrm{free}}\\ 0 & \text{for } \tau_{\mathrm{s}}(\mathbf{r})>\tau_{\mathrm{free}}\end{cases} \tag{3.8.23}$$

である（図 3.8.4）。ただしτ_{a}, τ_{s}はそれぞれ吸収・散乱の光学的厚さ

$$\tau_a(\mathbf{r})=\int_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}}\beta_{\mathrm{a}}(t)dt;\quad t=\left|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\right| \tag{3.8.24a}$$

$$\tau_s(\mathbf{r})=\int_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}}\beta_{\mathrm{s}}(t)dt;\quad t=\left|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\right| \tag{3.8.24b}$$

である。放射照度と加熱率は$\tau<\tau_{\mathrm{free}}$の軌跡の途中の複数の点ででサンプリングされる。それぞれのサンプリング量は，

$$\psi(\mathbf{r})=wT(\mathbf{r}) \tag{3.8.25}$$

$$\eta(\mathbf{r}\to\mathbf{r}')=w\left[T(\mathbf{r})-T(\mathbf{r}')\right] \tag{3.8.26}$$

と与えられる。方法 II や III のように **r** から **r**'の区間内のどこで加熱率をサンプリングするかを決める必要はない。この方法は方法 I と比較して加熱率の計算精度が良い。しかし方法 II や III と同様に負荷の高い指数関数を多用するため，方法 I よりも計算時間

は増大する。またやはり方法 II や III と同様に空間分割されたボリューム要素をモデル光子が通過する度にその要素内での幾何学的・光学的パスの長さを計算しなければならない。従って後述する最大消散係数法（4.1 節）を使うことができない。

この方法には別な利点として，透過率 (3.8.23) は吸収係数の異なる様々な波長について計算できることが挙げられる。大気中の雲，エーロゾル，空気分子などの散乱媒体の散乱係数は波長によって緩やかに変化する関数であり，狭い波長帯の中では一定と見なせる。それに対して，気体の吸収係数は波長によって激しく振動する関数である。散乱係数の分布が同じであれば光子は同じ軌跡を飛行する。吸収係数が波長によって異なるので光子のウェイトだけを(3.8.23)に従って各波長について計算すれば複数の波長についての計算が一度にできる。ある狭い波長帯について平均した放射量を計算する場合にもバンドモデルまたは k 分布法で各サブバンドに分けてそれぞれ放射計算するよりも，この方法 IV を使えば各サブバンドについての計算が一度にでき，精度も優れている。

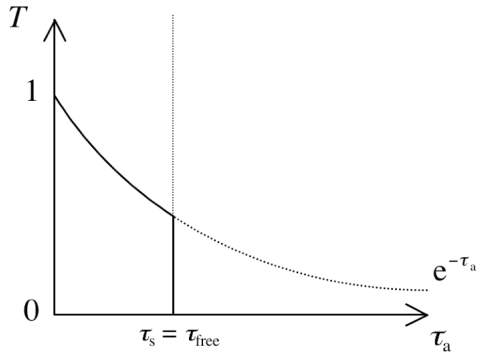


図 3.8.4 方法 IV における透過率：τ_{free} までのパスで連続的に吸収が起き，τ_{free} の点で散乱が起きる

3.9 局所推定法

局所推定法 (local estimation method, LEM) (Marchuk et al., 1980; Evans and Marshak, 2005) は，放射源や衝突点から特定の方向へ射出され，特定の位置まで透過するエネルギーを解析的に計算する方法である。以下の量が計算できる。

- 任意の断面における特定方向の面積平均放射輝度
- 局所的な点における角度平均放射量（放射輝度，放射照度）

3.9.1 局所推定法の原理

LEM は射出・散乱・反射のイベントの度に，そのイベントが起きた位置からディテクターの視野の中に入ってくる確率を解析的に計算して積算する方法である。任意の断面について面積平均された放射輝度, 任意の点における任意の角度領域について平均化された放射輝度，あるいは任意の点の放射照度（irradiance and spheradiance），などが計算できる。

LEM では位置 $\mathbf{r}_0$ における射出・散乱・反射のイベントに伴って以下の量をサンプリングする。

$$\xi(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1) = w\Psi(\mathbf{\Omega}_0,\mathbf{\Omega}_1)T(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1) \tag{3.9.1}$$

ここで w は射出，散乱，または反射後のモデル光子のウェイト，Ψ は規格化された角度分布関数 (ADF) (/str) ，T は $\mathbf{r}_0$ からディテクターの位置 $\mathbf{r}_1$ までの透過率であり，光学的厚さの関数である。

$$T(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1) = \mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)} \tag{3.9.2a}$$

$$\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1} \beta_e(t)dt;\ \ t = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| \tag{3.9.2b}$$

この光学的厚さを厳密に求めるには $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_1$ まで（負荷の高い）レイトレーシングが必要となる。ADF は,

$$\int_{4\pi} \Psi(\mathbf{\Omega}_0,\mathbf{\Omega}_1)|\cos\theta_1|d\mathbf{\Omega} = 1 \tag{3.9.3}$$

と規格化されている。ディテクターにおける入射位置 $\mathbf{r}_1$ はイベントの起きた位置 $\mathbf{r}_0$ から方向 $\mathbf{\Omega}_1$ に延びる線上にある。よって,

$$\mathbf{\Omega}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\right|} \tag{3.9.4}$$

が成り立つ。

求めるべき放射量は一般に以下のように全てのモデル光子の全ての射出・散乱・反射イベントについて積算した形に書ける。

$$Q = \sum_{p=0}^{N_p} \sum_{s=0}^{N_s(p)} E_1 \psi_{p,s}\left(\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{r}_1\right) \Xi_{p,s}\left(\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{r}_1\right) \tag{3.9.5a}$$

$$\Xi_{p,s}\left(\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{r}_1\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{\Omega}_1 \in \mathbf{U} \text{ and } \mathbf{r}_1 \in \mathbf{R} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.9.5b}$$

ここで，N_p はモデル光子の総数，N_s は最大散乱次数，**U** はディテクターに入ってくる方向の集合で，**R** はディテクターに入射する位置の集合である。E_1 はウェイトが 1 のモデル光子一個が輸送する放射エネルギー (単位: W) である。

$$E_1 = \frac{E_\mathrm{tot}}{N_\mathrm{p}} \tag{3.9.6}$$

が成り立つ。E_tot は放射源から射出される全エネルギーである。

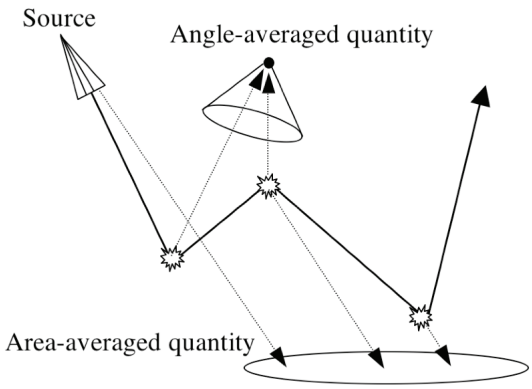


図 3.9.1 LEM を用いたサンプリングの概念図

領域平均放射輝度

任意の高度における面積 A の水平断面要素 $\mathbf{R}$ における $\mathbf{\Omega}_1$ 方向の面積平均放射輝度（単位 W m^{-2} str^{-1}）は

$$\bar{I}(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{R}) = \frac{\int_{\mathbf{R}} I(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)dA}{\int_{\mathbf{R}} dA} = \frac{1}{A}\int_{\mathbf{R}} I(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)dA \tag{3.9.7}$$

である。これを LEM で計算する場合，(3.9.4) における ψ は

$$\psi(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1) = \frac{\xi(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)}{A} \tag{3.9.8}$$

で与えられる。

角度平均された局所的放射輝度

任意の位置 $\mathbf{r}_1$ における立体角 ξ の角度領域 $\mathbf{U}$ における角度平均放射輝度（単位 W m^{-2} str^{-1}）は

$$\tilde{I}(\mathbf{U},\mathbf{r}_1) = \frac{\int_{\mathbf{U}} I(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)d\xi}{\int_{\mathbf{U}} d\xi} = \frac{1}{\xi}\int_{\mathbf{U}} I(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)d\xi \tag{3.9.9}$$

である。位置 $\mathbf{r}_0$ における微小水平断面積 dA は位置 $\mathbf{r}_1$ における微小立体角 $d\xi$ と以下の関係がある。

$$d\xi = dA \cdot \frac{|\cos\theta_1|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^2} \tag{3.9.10}$$

これを利用すると，LEM で角度平均放射輝度を計算する場合，ψ は

$$\psi(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1) = \frac{\xi(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)}{\xi}\frac{|\cos\theta_1|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^2} \tag{3.9.11}$$

で与えられる。

このタイプのモンテカルロ積分はサンプリングされる ψ の距離 $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|$ に対する依存性のため，理論的には分散が無限大である（光子数をいくら増やしても収束しない）。

例えば放射量を求める位置の近傍で散乱が起きると，そこからの寄与は 10 倍遠方で散乱された場合よりも 100 倍も大きい。このような場合の分散減少法については Marchuk et al. (1980) で議論されている。

半球または全球で積算された局所的放射照度 (irradiance/spheradiance)

任意の方向 $\mathbf{\Omega}_c$ を向いた平面上の任意の位置 $\mathbf{r}_1$ における半球の角度領域 $\mathbf{U}$ における放射照度（単位 W m^{-2}）は

$$\overline{F}(\mathbf{U},\mathbf{r}_1)=\int_{2\pi} I(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)\left|\mathbf{\Omega}_1\cdot\mathbf{\Omega}_c\right| d\mathbf{\Omega}_1 \tag{3.9.12}$$

である。これを LEM で計算する場合，ψ は

$$\psi(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)=\zeta(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)\frac{\left|\cos\theta_1\right|}{\left|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0\right|^2}\left|\mathbf{\Omega}_1\cdot\mathbf{\Omega}_c\right| \tag{3.9.13}$$

で与えられる。同様に（半球ではなく）任意の角度領域について積分した放射量を計算することもできる。

特殊な場合として，水平面上の放射照度

$$\overline{F}(\mathbf{U},\mathbf{r}_1)=\int_{2\pi} I(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)\left|\cos\theta_1\right| d\mathbf{\Omega}_1 \tag{3.9.14}$$

を考えると，

$$\psi(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)=\zeta(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)\frac{\left|\cos\theta_1\right|^2}{\left|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0\right|^2} \tag{3.9.15}$$

が成り立つ。

任意の位置 $\mathbf{r}_1$ における spheradiance (actinic flux とも呼ぶ)（単位 W m^{-2}）は

$$\widehat{F}(\mathbf{r}_1)=\int_{4\pi} I(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1)\, d\mathbf{\Omega}_1 \tag{3.9.16}$$

である。(3.9.12) の放射照度との違いは特定の平面に対する射影を考えていないことである。例えば，植物の光合成量の評価や生物が浴びる紫外線量の評価には spheradiance の方が重要である。これを LEM で計算する場合，ψ は

$$\psi(\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{r}_1) = \zeta(\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{r}_1) \frac{|\cos\theta_1|}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^2} \tag{3.9.17}$$

で与えられる。

3.9.2 ADF (Angular Distribution Function) の定義

<u>*大気中の粒子による散乱の場合*</u>

$$\Psi(\theta_0, \phi_0, \theta_1, \phi_1) = \frac{P(\theta_0, \phi_0, \theta_1, \phi_1)}{4\pi|\cos\theta_1|} \tag{3.9.18}$$

ただし，P は散乱位相関数で,

$$\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} P(\theta_0, \phi_0, \theta_1, \phi_1) d\mathbf{\Omega}_1 = 1 \tag{3.9.19}$$

と規格化されている。例えば等方散乱の場合 $P = 1$ である。

<u>*地表面反射の場合*</u>

$$\Psi(\theta_0, \phi_0, \theta_1, \phi_1) = \frac{R(\theta_0, \phi_0, \theta_1, \phi_1)}{\alpha(\theta_0, \phi_0)} \tag{3.9.20}$$

である。ここで R は BRDF，α はアルベドである。ただし，BRDF は

$$\int_{2\pi} R(\theta_0, \phi_0, \theta_1, \phi_1)|\cos\theta_1| d\Omega = \alpha(\theta_0, \phi_0) \tag{3.9.21}$$

と規格化されている。例えば Lambertian の場合 $R = \alpha/\pi$ である。

大気粒子からの熱放射の場合

$$\Psi(\theta_0,\phi_0,\theta_1,\phi_1)=\frac{1}{4\pi|\cos\theta_1|} \tag{3.9.22}$$

つまり等方散乱の場合と同じである。

地表面からの熱放射の場合

$$\Psi(\theta_0,\phi_0,\theta_1,\phi_1)=\frac{\varepsilon(\theta_0)}{\pi\bar{\varepsilon}} \tag{3.9.23}$$

ここで ε は射出率で，反射率（アルベド）を α で表すと，

$$\varepsilon(\mu_0)=1-\alpha(\mu_0) \tag{3.9.24}$$

が成り立つ。また「平均反射率」「平均射出率」はそれぞれ

$$\bar{\alpha}=2\int_0^1\alpha(\mu_0)\mu_0 d\mu_0 \tag{3.9.25a}$$

$$\bar{\varepsilon}=1-\bar{\alpha} \tag{3.9.25b}$$

である。例えば，ランバート面では $\Psi = 1/\pi$ となる。

円錐状の角度領域に等方的に射出する放射源（太陽光など）の場合

$$\Psi(\theta_0,\phi_0,\theta_1,\phi_1)=\begin{cases}\dfrac{1}{\bar{v}(\Theta,\Delta)} & \text{if } \mathbf{\Omega}_1\cdot\mathbf{\Omega}_0>\cos\Delta\\ 0 & \text{if } \mathbf{\Omega}_1\cdot\mathbf{\Omega}_0\le\cos\Delta\end{cases} \tag{3.9.26}$$

ここで，Δ は角度領域中心角の半幅，Θ は中心方向の天頂角である。

$$\bar{v}(\Theta,\Delta)=\int_0^{2\pi}\int_{\cos\Delta}^1|\cos\theta|d\cos\hat{\theta}d\hat{\phi} \tag{3.9.27a}$$

$$\cos\theta=\sin\Theta\sin\hat{\theta}\cos\hat{\phi}-\cos\Theta\cos\hat{\theta} \tag{3.9.27b}$$

である。例えば角度領域が水平面を横切っていない場合（$\cos\Delta > \sin\Theta$），

$$\overline{\upsilon}(\Theta,\Delta) = \pi|\cos\Theta|\sin^2\Delta$$

が成り立つ。さらに特殊な場合として $|\cos\Theta| = 1$ かつ $\Delta = \pi/2$ の場合は，Lambert 面と同じで,

$$\Psi(\theta_0,\phi_0,\theta_1,\phi_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{if } \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_0 > 0 \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_0 \le 0 \end{cases} \tag{3.9.28}$$

となる。一般の場合の (3.9.27a) の関数の計算法については 3.2 節で述べている。

3.10 球面効果の扱い

惑星大気中の放射伝達は一般には球形の惑星の表面にシェル上に広がる球面座標系で考える必要がある。多くの場合は大気を平行平板と仮定して問題ないが，例外は光が水平に近い角度で伝達する場合である。例えば太陽高度が低いときまたは日の出前，日の入り後の光の強度を求める場合や，測器が水平線すれすれの方向を向いている場合の放射輝度の計算などで球面効果が重要になる。このような場合は屈折も重要である。

この節では局所推定法を使って放射輝度を計算する場合の球面効果の扱いについて述べる。特に最終散乱点からディテクターまでのパス（line of sight）について球面効果の補正を考える。

3.10.1 球面効果の概要

局所推定法 (3.9 節) を用いて放射輝度をサンプリングするとき，以下の量をサンプリングすることになる。

$$\zeta(\mathbf{\Omega}_1,\mathbf{r}_1) = w\Psi(\mathbf{\Omega}_0,\mathbf{\Omega}_1)T(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1) \tag{3.10.1}$$

ここで w は散乱（または反射）後のウェイト，Ψ は規格化された角度分布関数 (/str)，T は散乱点 $\mathbf{r}_0$ からディテクター位置 $\mathbf{r}_1$ までの透過率であり，光学的厚さの関数である。

$$T(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1) = \mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)} \tag{3.10.2a}$$

$$\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1} \beta_e(t)dt;\quad t = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| \tag{3.10.2b}$$

ここで Ψ は例えば大気中の粒子による散乱の場合

$$\Psi(\mathbf{\Omega}_0,\mathbf{\Omega}_1) = \frac{P(\mathbf{\Omega}_0,\mathbf{\Omega}_1)}{4\pi|\cos\theta_1|} \tag{3.10.3}$$

ただし，P は散乱位相関数である。地表面反射の場合

$$\Psi(\mathbf{\Omega}_0,\mathbf{\Omega}_1) = \frac{R(\mathbf{\Omega}_0,\mathbf{\Omega}_1)}{\alpha(\mathbf{\Omega}_0)} \tag{3.10.4}$$

である。ここで R は BRDF，α はアルベドである。

平行平板大気で屈折を考えない場合は line of sight は直線であるのでディテクターに入ってくる方向と散乱点から射出される方向が等しい（図 3.10.1 左）。球状大気の場合または屈折を考える場合は，途中で方向が曲がるため，ディテクターに入ってくる方向と散乱点から射出される方向が異なる（図 3.10.1 右）。よって (3.10.1) 中の Ψ が球面効果によって変わる。また (3.10.2) の透過率 T も光学的厚さ τ と共に変化する。また球面効果により幾何学的なパス長も変化する。

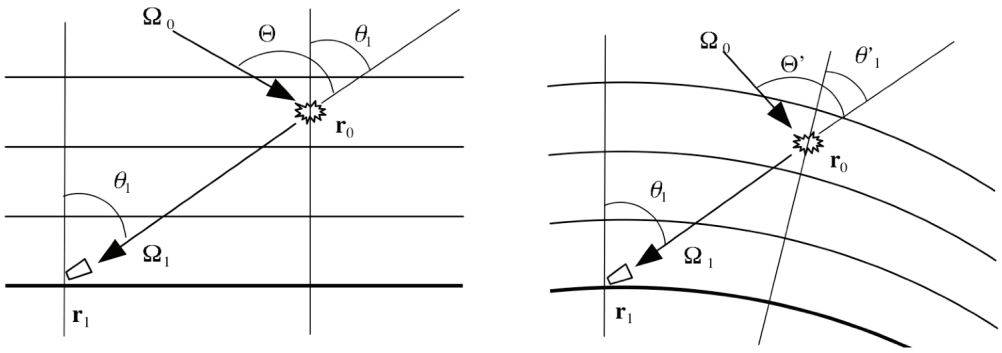


図 3.10.1　放射輝度のサンプリングの概念図。左：平行平板大気，右：球状大気

3.10.2 球面効果の補正：line of sight

球面座標系で光が直線的に高度差 Δ だけの進む場合のパスの長さ a とこのパスが座標系中心（惑星中心）に対してなす角度 A を求めよう。パスの始点と終点をそれぞれ C, B とし，それぞれの座標系中心からの距離を b, c とする（この定義に注意：図 3.10.2 参照）。惑星の半径を R_p とし，

$$c = R_p + c' \tag{3.10.5a}$$

$$b = R_p + b' \tag{3.10.5b}$$

とおく。このとき高度差は，

$$\Delta = c - b = c' - b' \tag{3.10.6}$$

である。Line of sight 上に交点を持つのは以下の条件が成り立つときである。

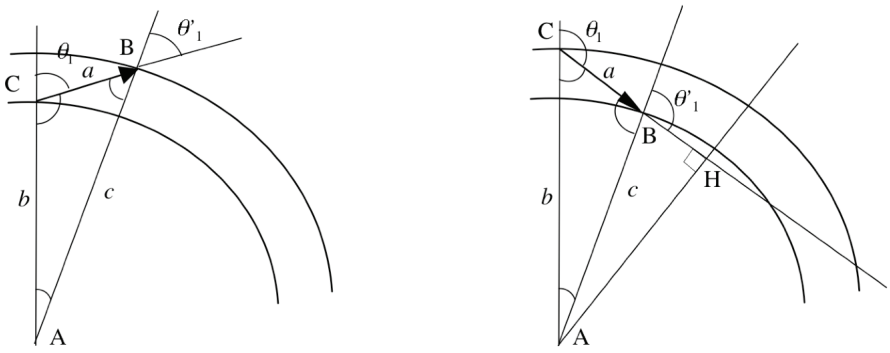


図 3.10.2　球面座標系におけるジオメトリー。左：上向きにトレースする場合，右：下向きにトレースする場合。

$$-\Delta < b(1-\sin C) = b\frac{\cos^2 C}{1+\sin C} = \left(R_p + b'\right)\frac{\cos^2\theta_1}{1+\sin\theta_1} \tag{3.10.7}$$

この条件が成り立たないときは，点 C から B に至る経路は（球面座標系では）無いということを意味している。下向きにトレースするとき（Δ が負）にこのようなことがあり得る。

パス長 a については余弦定理より以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 2\left(1-\cos A\right)c\left(c-\Delta\right) + \Delta^2 \end{aligned} \tag{3.10.8}$$

角度 A は，$B = \pi - A - C$ と正弦定理を使うと，

$$\begin{aligned} b\sin C &= c\sin B \\ &= c\sin(A+C) \end{aligned} \tag{3.10.9a}$$

$$\sin(A+C) - \frac{b}{c}\sin C = 0 \tag{3.10.9b}$$

$$\sin(A+C) - \left(1-\delta\right)\sin C = 0 \tag{3.10.9c}$$

を A について解けばよい。ここで

$$\delta = \frac{\Delta}{c} = \frac{\Delta}{R_p + c'} \tag{3.10.10}$$

と置いた。δ は通常非常に小さい。R_{p} が十分に大きいとき，$\delta = 0$ であり，(3.10.9) の解は，$A = 0$ である。(3.10.8) の解は，

$$A = \sin^{-1}\left(\left(1-\delta\right)\sin C\right) - C \tag{3.10.11}$$

である。δ が小さいのでこの式をそのまま計算すると桁落ちが激しく数値計算上の困難がある。実際には以下に示す方法で精度良く解が求まる。

a. 数値的解法を用いた A の求め方

まず (3.10.11) に出てくる

$$\sin^{-1}\left(\left(1-\delta\right)\sin C\right) \tag{3.10.12}$$

を求めよう。これは，

$$f(x) = \sin x - \left(1-\delta\right)\sin C = 0 \tag{3.10.13}$$

の解である。微分すると，

$$f'(x) = \cos x \tag{3.10.14}$$

である。ニュートン法を使うと，

$$x_{i+1} = x_i - \Delta x_i \tag{3.10.15a}$$

$$\Delta x_i = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{3.10.15b}$$

という漸化式が得られる。初期推定値を

$$x_0 = C \tag{3.10.16}$$

とすれば，(3.10.9) の解は

$$x = C - \sum_{i=0}^{\infty} \Delta x_i \tag{3.10.17}$$

である。(3.10.15b), (3.10.16) より,

$$\Delta x_0 = \frac{f(C)}{f'(C)} = \delta \frac{\sin C}{\cos C} \tag{3.10.18}$$

であるので，結局 (3.10.11) の角度 A は

$$A = -\sum_{i=0}^{\infty} \Delta x_i = -\delta \frac{\sin C}{\cos C} - \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_i \tag{3.10.19}$$

により計算できる。第一次近似的には,

$$A \approx -\delta \frac{\sin C}{\cos C} \geq 0 \tag{3.10.20}$$

である。

式 (3.10.19) の計算アルゴリズムは以下の通りである。

1) 初期推定値 A_0 を求める

$$A_0 = -\delta \frac{\sin C}{\cos C} \tag{3.10.21}$$

2) 以下を計算

$$p = \sin A_i \approx A_i - \frac{1}{6} A_i^3 + \frac{1}{120} A_i^5 - \cdots \tag{3.10.22a}$$

$$q = \cos A_i \approx 1 - \frac{1}{2} A_i^2 + \frac{1}{24} A_i^4 - \cdots \tag{3.10.22b}$$

$$r = 1 - \cos A_i = \frac{\sin^2 A_i}{1 + \cos A_i} = \frac{p^2}{1+q} \tag{3.10.23c}$$

3) Δx_i を求める

$$\begin{aligned} f(C + A_i) &= \sin\left(C + A_i\right) - \left(1 - \delta\right)\sin C \\ &= p\cos C - (r - \delta)\sin C \end{aligned} \tag{3.10.24a}$$

$$f'(C + A_i) = q\cos C - p\sin C \tag{3.10.24b}$$

$$\therefore \Delta x_i = \frac{f(C + A_i)}{f'(C + A_i)} = \frac{\left(p\cos C - r\sin C\right) + \delta\sin C}{q\cos C - p\sin C} \tag{3.10.24c}$$

4) $A_{i+1} = A_i - \Delta x_i$ (3.10.25)

5) Δx_i が A_i に比べて十分小さければ終了。そうでなければ (2) へ戻る。

この繰り返しは通常 2 回以内に収束する。

b. パス長と光学的厚さの補正

パス長は (3.10.22c) を (3.10.8) に代入して,

$$a = \sqrt{2rc(c-\Delta)+\Delta^2} \tag{3.10.26}$$

となる（正弦定理を使うよりもこの方が良い)。平行平板大気の座標系で対応するパス長は,

$$\frac{\Delta}{-\cos C} \tag{3.10.27}$$

であるので，球面効果により，パス長と光学的厚さは

$$\frac{-a\cos C}{\Delta} \tag{3.10.28}$$

倍に補正される。

c. 方向の補正

パス長 a のパスで方向は角度 A だけ回転することになる。天頂角だけが変わり，方位角は変わらない。トレースする方向の天頂角を θ とすると,

上向きにトレースする場合：$\cos\theta > 0$

下向きにトレースする場合：$\cos\theta < 0$

である。どちらの場合も終点における方向は，(3.10.22a,b) を用いて，以下のように決まる。

$$\theta' = \theta - A \tag{3.10.29a}$$

$$\sin\theta' = \sin\theta\cos A - \cos\theta\sin A = q\sin\theta - p\cos\theta \tag{3.10.29b}$$

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos A + \sin\theta\sin A = q\cos\theta + p\sin\theta \tag{3.10.29c}$$

角度 A は常に 0 以上であるので，球面効果を考慮すると，トレースの向きによらず天頂角は次第に小さくなる。

d. 実装：アルゴリズム

実際には多層の大気中で屈折も考慮してトレースしなければならない。簡単のため屈折は層の境界で不連続的に起きると仮定する。トレースするときは均一な層の中で移動する度に球面効果の補正をし（3.10.29 で天頂角を修正），層の境界では屈折効果を考慮して天頂角を修正する。球面効果の補正を実装する場合，例えば以下のアルゴリズムが考えられる。

1) まず考えている放射輝度（ディテクター）の方向 $\mathbf{\Omega}_1$ に入ってくる光線が最終散乱点 $\mathbf{r}_0$ においてどのような向き $\mathbf{\Omega}'_1$ であったかを知る必要がある。そのためにはディテクターと同じ高度から光の伝達方向とは逆向きにトレースして，$\mathbf{r}_0$ と同じ高度に達したときの向き $\mathbf{\Omega}'_1$ を求める。このトレースの過程で屈折と球面効果を考慮する。
2) 散乱点 $\mathbf{r}_0$ における $\Psi(\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{\Omega}'_1)$ を求める。
3) 散乱点 $\mathbf{r}_0$ からディテクターに $\mathbf{r}_1$ に向けてトレース開始。光学的厚さと各層の幾何学的厚さをサンプリングする。やはり屈折と球面効果を考慮する。

(1) の計算を高速化するために，様々な高度から各ディテクターまでトレースする場合の初期位置における方向をあらかじめ求めて参照表 LUT にしておくという方法も考えられる。

屈折と球面効果を考えた場合，ある高度からある高度に到達できる経路が必ずあるとは限らないことに注意が必要である。

図 3.10.3 は地上観測の放射輝度と規格化された平均パス長 (AMF) について屈折効果と球面効果を示している。

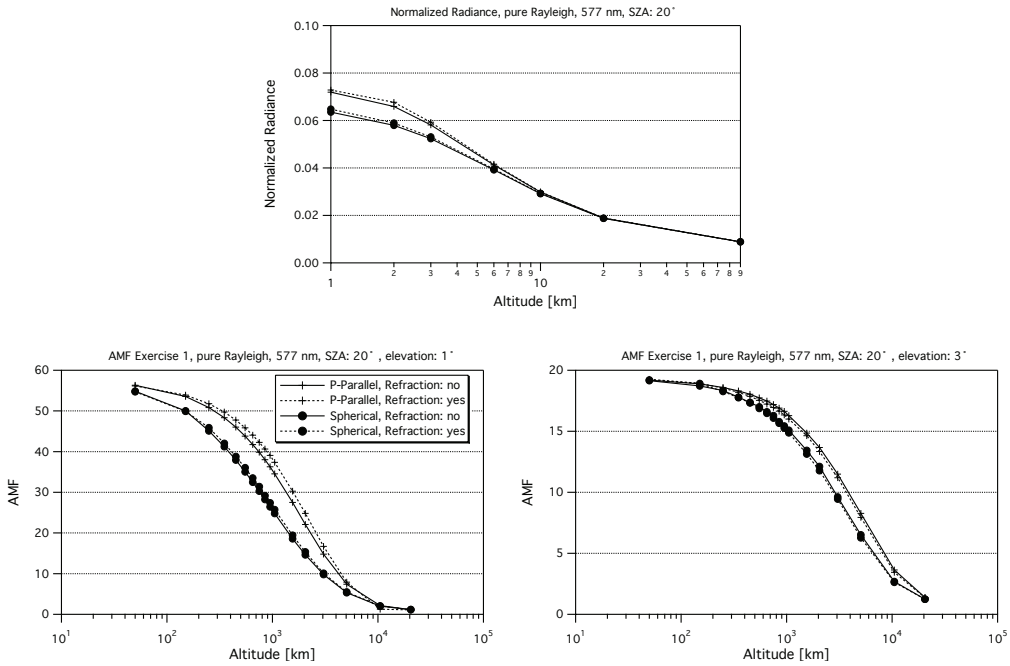


図 3.10.3　地上観測放射輝度および air mass factor (AMF) に対する屈折効果と球面効果

3.11 波長積分

ここでは，ある波長範囲について積分された光量（放射照度及び光量子束密度）をモンテカルロ法を用いて計算する方法について述べる。モンテカルロ法を用いる場合，後述するように，単波長についての計算とほぼ同じ計算時間で波長積分の計算が可能である。これは他の方法にはない強力な特長である。

なお，本文中では，モンテカルロ法でサンプリングする個々の「モデル光子」と，電磁波の量子単位である物理的な「光子」の２つの概念が混在する。本文章では両者を区別する為に前者をモデル光子，後者を「光量子」と区別して呼ぶことにする。

3.11.1 地球外太陽放射照度及び光量子束密度

図 3.11.1(a)は，地球大気上端における太陽入射光の分光放射照度 F_λ(Wm^{-2}μm^{-1})である。太陽天頂角を θ_s すると大気上端に θ_s から入射した太陽放射照度は $F_\lambda\cos(\theta_s)$となる。図 3.11.1(b)は太陽放射の波長別光量子束密度 Q_λ(μmolm^{-2}s^{-1}μm^{-1})である。光量子束密度 Q_λ は，放射照度 F_λから計算することができる。波長λにおける 1 光量子辺りのエネルギー E_pは,光速を c(=2.997×10^{8}ms^{-1}),プランク定数を h(=6.626×10^{-34})とすると以下の式で表せる。

$$E_p = ch/\lambda \tag{3.11.1}$$

放射照度 F_λは光量子束密度 N に変換すると以下のようになる。

$$N = F_\lambda / E_p \tag{3.11.2}$$

従って, (3.11.2)をモル単位(μmolm^{-2}s^{-1}μm^{-1})で表すと

$$Q_\lambda = N/N_A = \frac{1}{chN_A}\lambda F_\lambda \tag{3.11.3}$$

となる。なお，N_A はアボガドロ数(=6.02×10^{23}mol-1)である。

光量子のエネルギーは波長に逆比例するから，波長が長くなるほど一光量子辺りのエネルギーは小さくなりエネルギーが一定であれば波長が長くなるほど, 光量子数は増加する。従って，太陽照度と光量子束密度の波長分布を比較すると（図 3.11.1(c)），光量子束密度のピーク波長の方が照度より長波長側に存在する。

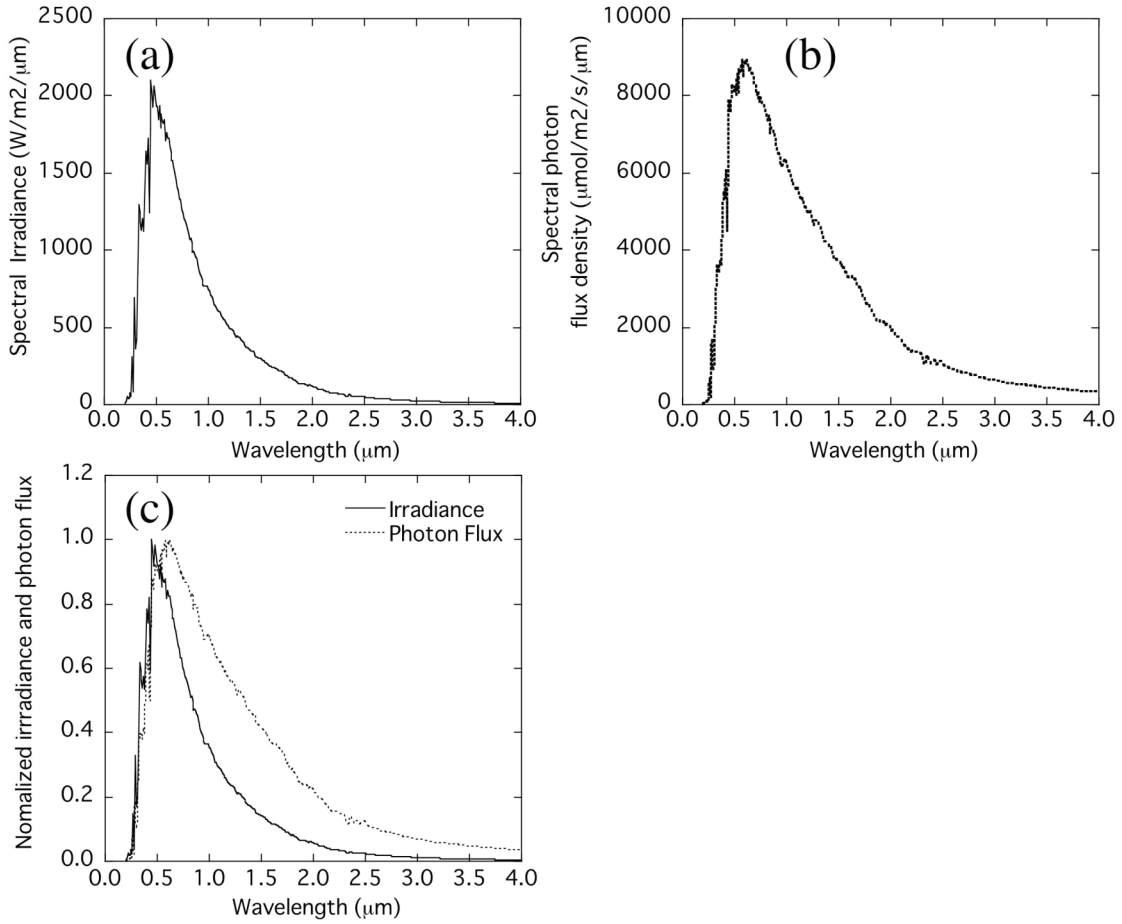


図 3.11.1 (a)地球外太陽分光照度, (b)光量子束密度分布, (c)太陽照度と光量子束密度の比較（値は規格化してある）

3.11.2 波長積分計算

モンテカルロ計算では，波長区間をいくつかに分割して，その各サブ区間では大気やキャノピーの光学特性は一定と仮定して計算する。各サブ区間でサンプリングされた放射量を合計することによって波長積分された放射量を算出する。実際のシミュレーションでは, 図 3.11.2 のフローチャートのようにモデル光子のループの上位に波長ループを加えることで波長積分計算を実行することができる。

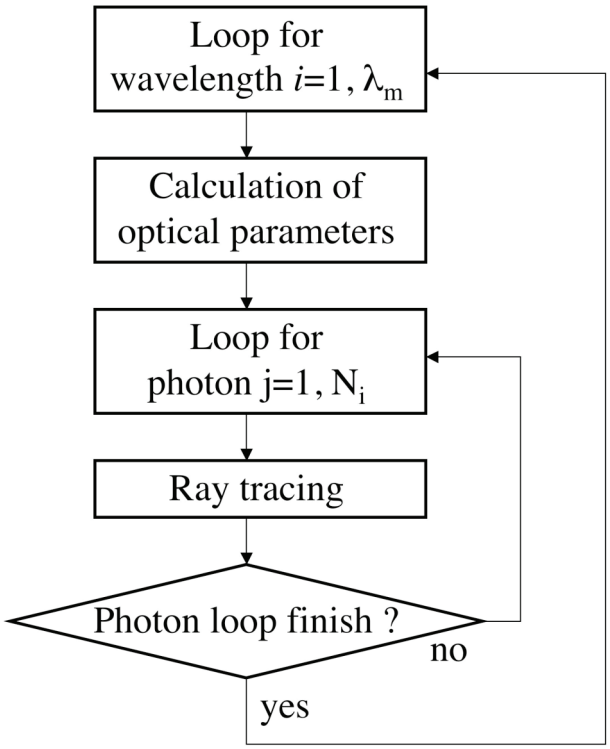


図 3.11.2 波長積分計算フローチャート

a. それぞれの波長に等しいモデル光子数を割り当てて計算する方法

波長区間[λ_{min}, λ_{max}]を M 分割してそれぞれのサブ区間でのモンテカルロ計算の和として，波長積分計算を行うことを考える。モデル光子の総数を N 個とし，それぞれのサブ区間に $N_i = N / M$ 個のモデル光子を入力して計算する場合, i 番目の波長区間における 1 モデル光子当たりの強度（エネルギー・光量子数）は以下のようになる。

$$\frac{M}{N}F_i \text{ or } \frac{M}{N}Q_i \tag{3.11.4}$$

ここで，F_i, Q_i は，i 番目の波長区間について積分した入射放射照度と光量子束密度であり，

$$F = \sum_{i=1}^{M} F_i, \quad F_i = \int_{\lambda i-1}^{\lambda i} F_\lambda d\lambda \tag{3.11.5a}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{M} Q_i, \quad Q_i = \int_{\lambda i-1}^{\lambda i} Q_\lambda d\lambda \tag{3.11.5b}$$

が成り立つ。

この方法は簡易で，分割したそれぞれの波長区間の平均放射量はほぼ安定した精度で得られる。反面, すべての波長区間で同一数のモデル光子を入射して計算を行うため, 十分な波長積分精度を得るためには，波長範囲で放射量への寄与が大きい波長区間（最もエネルギー量の大きい区間）で十分なシミュレーション精度が得られるだけのモデル光子を用いてサンプリングする必要がある。従って，一般的に等しいモデル光子数を割り当てて計算する方法では, 単一波長におけるシミュレーションの場合に比べて多くのモデル光子数が必要となるため，計算時間がかかる。波長積分量を計算することが目的のときには，次に説明する方法の方が優れている。

b. 入射光のスペクトル強度の重みを考慮して計算する方法

モンテカルロではサンプリングされる物理量の計算精度はサンプリング数に依存するため，ある波長範囲の積分計算であっても，入射光のスペクトル強度に比例するように入射光子数を決定することで, 単一波長の放射伝達計算とほぼ同じ光子数で同精度の計算を行うことができる。また，図 3.11.1 の様に入射照度と入射光量子束密度の分布は比較的近いため，多くの場合，両者を同時に計算することも可能である。

波長範囲$[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$において N 個のモデル光子を用いて放射伝達過程の積分計算を行うことを考える。入射照度の重みで入射するモデル光子数を決定する方法を考えると, i 番目の波長の重みは,

$$w_i = F_i / F, \quad \sum_{i=1}^{M} w_i = 1 \tag{3.11.6}$$

である。ここで F, F_i は (3.11.5a) で与えられる。i 番目の波長のモデル光子数 N_i は,

$$N_i = w_i N \tag{3.11.7}$$

となる。この場合， i 番目の波長区間での 1 モデル光子当たりの強度は照度単位では

$$\Delta F_i = \frac{F_i}{N_i} = \frac{F}{N} \tag{3.11.7}$$

と波長区間によらず一定となる。光量子束密度では

$$\Delta Q_i = \frac{Q_i}{N_i} \tag{3.11.8}$$

となる。なお太陽放射と熱放射の両方が寄与する波長域で積分する場合,

$$F_i = F_{\mathrm{solar},i} + F_{\mathrm{thermal},i} \tag{3.11.9}$$

となる。ここで $F_{\mathrm{thermal},i}$ は計算領域から射出される熱放射の総エネルギーをモデル領域の総面積で割って規格化した量（熱放射の平均放射照度）である。

3.12 群落光合成量

植生キャノピーのモンテカルロ放射伝達計算の結果を用いて植生キャノピー全体の光合成量を計算する方法について述べる。

3.12.1 単葉の光合成速度計算モデル

植物の光合成量を見積もる生化学モデルには様々な種類のモデルが存在する。ここでは, 現在最も広く利用されている単葉の光合成モデルとして Farquhar モデル(Farquhar et al., 1980)を利用する。詳細なモデル化は(Farquhar et al., 1980; de Pury and Farquhar, 1997)に記載しているので，ここでは基本的な部分について説明する。

単葉に吸収された光合成有効放射を I_l [μmols^{-1}m^{-2}]とすると，光化学系 II (Photosynthesis II)に吸収される光量 I_{le} は以下の式で表せる。

$$I_{le} = I_l(1 - f) / 2 \tag{3.12.1}$$

ここで f は葉緑体以外に吸収される光の割合である（Farquhar et al., 1980）。f は厳密には葉の厚さに依存するパラメータであるが，ここでは de Pury and Farquhar（1997）にならい $f = 0.15$ とする。

単位葉面積当たりの電子伝達の割合 J は，J の最大限度（ポテンシャル J）を J_m とすると，J_m の条件下での I_{le} の解として，以下の二次方程式から解の公式で計算できる。

$$\theta_l J^2 - (I_{le} + J_m)J + I_{le}J_m = 0 \tag{3.12.2}$$

ここで，θ_l は APAR に対する葉面の電子伝達の応答形状を決定する半経験的パラメータである。de Pury and Farquhar（1997）では $\theta_l = 0.7$ としている。また，J_m は温度に依存した関数である。J を用いると光合成系電子伝達速度制約下の光合成量 A_j は以下の式で計算できる。

$$A_j = J\frac{p_i - \Gamma^*}{4(p_i + 2\Gamma^*)} \tag{3.12.3}$$

ここで，Γ^*はミトコンドリア呼吸の欠乏時における光合成量計算の際の二酸化炭素補償点Γ (Pa)である。また，p_i は葉内の二酸化炭素分圧である。

またリブロース二リン酸(RuBP)制約下において光合成速度は,

$$A_v = V_l \frac{p_i - \Gamma^*}{p_i + 2K'} \tag{3.12.4}$$

ここで，K'は，有効ミカエルメンテン定数である。最終的に光合成速度 A_l は，(3.12.3)と(3.12.4)の中で光合成量の計算値が小さい方を解として選択することで決定できる。つまり，

$$A_l = \min(A_j, A_v) - R_l \tag{3.12.5}$$

ここで，R_l は葉面の呼吸速度である。

3.12.2 放射伝達モデルによる吸収光合成有効放射量（APAR）計算方法

3 次元植生キャノピー放射伝達モデルで, 直接的に計算できる放射量は以下の通りである。

- ボクセル内のトータルの APAR [$\mu mols^{-1}m^{-2}m^{-3}$] or [$Wm^{-2}m^{-3}$]
- ボクセル内の散乱成分の APAR [$\mu mols^{-1}m^{-2}m^{-3}$] or [$Wm^{-2}m^{-3}$]
- ボクセル内で吸収された直達モデル光子の数

a. 各ボクセルにおける陽葉の面積の算出

各ボクセルにおいて直達光の当たる葉（陽葉）の葉面積は，ボクセル内で吸収された直達モデル光子の数を用いて計算することができる。キャノピーシーンに入射するモデル光子の総量を N とし，単位ボクセルの x,y 方向の長さをそれぞれ x_d,y_d とすると，樹冠上端で単位ボクセル辺りに入射するモデル光子の数(N_d[m^{-2}]) は

$$N_d = N / (x_d y_d) \tag{3.12.6}$$

である。ここで，ボクセル中で吸収された直達モデル光子の数を N_a とすると，単位ボクセル体積に対する陽葉の射影面積(u_p[m^2]) は，

$$u_p = (x_d y_d) N_a / N_d \tag{3.12.7}$$

である。また，ベクトル $\mathbf{\Omega}(\theta,\phi)$ 方向へ射影した葉面積(樹冠の単位体積当たり) G は 2.3 節で定義したように以下の式で計算できる。

$$G(\mathbf{\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} g_L(\theta_L)\left|\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega}_L\right| d\theta_L d\varphi_L \tag{3.12.8}$$

ここで，g_L は葉面の傾き分布関数である。g_L= 1 の時, つまり葉面の傾き分布が一様の場合, G は 0.5 である。

太陽光の入射方向への射影面積(3.12.7)を(3.12.8)の G を用いて陽葉の全面積を変換すると，以下のようになる。

$$u_s = u_p / G \tag{3.12.9}$$

b. 各ボクセル内の光合成量の計算

各ボクセルの総光合成量は, 植生キャノピーの放射伝達モデルで計算できる物理量と 3.12.1 小節で示した単葉の光合成計算モデルを用いて計算することができる。ここでは, ボクセルサイズは森林・草地等の植生キャノピー内での光環境の空間的な不均一性に比較して十分小さいと仮定し, 単一のボクセル内では散乱光の不均一性が極めて小さいとする。また各ボクセル内では，散乱光は上半球から下向きに入射し，その強度は方向によらず均一に入射すると仮定する。

式(3.12.5)の光合成計算モデルは単位葉面積当たりの APAR である I_l の関数である (A=f(I_l))。一方，植生キャノピーの放射伝達モデルで計算された APAR は，単位体積当たりの APAR である。陽葉と陰葉で単位面積当たりに吸収される APAR($I_{l,sun}$,$I_{l,shade}$)は以下の式で計算できる。

$$I_{l,sun} = I_{dir}\left(\Omega_s\cdot\Omega_L\right)(1-\omega) + \frac{\mathrm{APAR_{dif}}}{u} \tag{3.12.10}$$

$$I_{l,shade} = \frac{\mathrm{APAR_{dif}}}{u} \tag{3.12.11}$$

ここで，I_{dir} はキャノピー上端に入射する直達 PAR である。よって各ボクセルの総光合成量は以下の計算式で求められる。

$$A_{vox} = \frac{u_s}{2\pi}\int_{2\pi} A_l(I_{l.sun})g_L(\Omega_L)d\Omega_L + \frac{(u-u_s)}{2\pi}\int_{2\pi} A_l(I_{l.shade})g_L(\Omega_L)d\Omega_L \tag{3.12.12}$$

ここで，右辺第一項が陽葉，第二項が陰葉の光合成速度である。なお，この(3.12.12)では葉の表面と裏面を区別していないが，葉の表面と裏面では光合成能力が異なるので,

光合成量のより詳細な影響解析を行う場合には, 裏面と表面の割合を葉面積の傾き毎に算出し, 表面と裏面で Farquhar モデルの定数を変更して計算を行う必要があることに注意を要する。

第４章　計算効率の改良

4.1 最大消散係数法

モンテカルロモデルの中で大気は細かな構造を表現するために多数のボクセルに分割されることが多い。個々のボクセルは固有の光学特性（消散係数, 一次散乱アルベド, 散乱位相関数）を持ち, ボクセル内は均質と仮定するが, ボクセル同士は不均質である。このような状況で光子の軌跡をトレースする場合, 光子の通過する個々のボクセル内の光学的厚さを求めるため，光線とボクセル境界の交点を逐一求めなければならない（図 4.1.1）。この計算は，ボクセルが非常に細かい場合大変な計算負荷となる。例えば地球大気の上部は比較的光学的に薄い。そこでの平均パス長が今 100 km だったとして，0.1 km の厚さの大気の層が 1000 層（全体で 100 km）あったらどうなるか？光子の次の衝突点を見つけるために層の境界との交差点を逐一計算していたら 1000 回ものオーダーの計算が必要になる！

この問題を回避する方法として最大消散係数 (Maximum Cross Section, MCS) 法がある（Marchuk et al. 1980）。MCS 法は多くのモンテカルロ放射モデルで用いられている。

4.1.1 最大消散係数法の原理

ある領域内の消散係数の最大値を$\beta_{\max}$としたとき，similarity relations (e.g., Liou, 1992) に基づくスケーリング変換を用いると，領域内全体が一定の消散係数$\beta_{\max}$を持っている媒体と考えることができる。個々のボクセル内の媒体は次の表のようにオリジナルの媒体と散乱角 0 度の前方散乱（「散乱しない」のと等価）をする媒体の二つの混合媒体と考えることができる。つまり本来「透過」する光の一部を仮想的な「前方散乱」として扱うのである。MCS 法を使うと衝突過程は以下の二つの衝突に分類される。

1) Real collision: オリジナルの physical collision
2) Virtual collision: スケーリング変換によって生じた mathematical scattering

表 4.1.1　最大消散係数法による光学特性の変化

媒体	消散係数	一次散乱アルベド	散乱位相関数
1	β_e	ω	$P(\Theta)$
2	$\beta_{max}-\beta_e$	1	$2\delta(\Theta)$
1+2	β_{max}	$\left(\omega\beta_e+\beta_{max}-\beta_e\right)/\beta_{max}$ $=1-\left(1-\omega\right)\beta_e/\beta_{max}$	$\dfrac{\omega\beta_e P(\Theta)+2\left(\beta_{max}-\beta_e\right)\delta(\Theta)}{\omega\beta_e+\beta_{max}-\beta_e}$

δはディラックのデルタ関数

MCS 法により消散係数はβ_eからβ_{max}に大きくなる。その分衝突回数は増えることになる。しかし,「仮想的な散乱」の扱いは物理的な散乱の場合よりもはるかに簡単である。なぜなら仮想的な散乱では吸収は起こらない（ω = 1）ことに加え，光子の進行方向が変化することもないからである。MCS 法を用いた場合のアルゴリズムは例えば以下のようになる。

1) 衝突位置の決定：最大消散係数β_{max}に基づいて決める。
2) 衝突の種類の決定：”virtual” or “real?” “real”である確率はβ_e/β_{max}であるので乱数によって決める
3) “Real”な衝突を検出するまで繰り返し：”virtual”であれば 1 へ戻る
4) “Real”な衝突の扱いは通常通り

この方法を用いると, 領域内の消散係数が一定として扱うことができるので個々のボクセル境界との交点を求める必要がない。光子は現在の位置から次の衝突点まで「ジャンプ」することができる。模式的に図にすると図 4.1.1 のようになる。

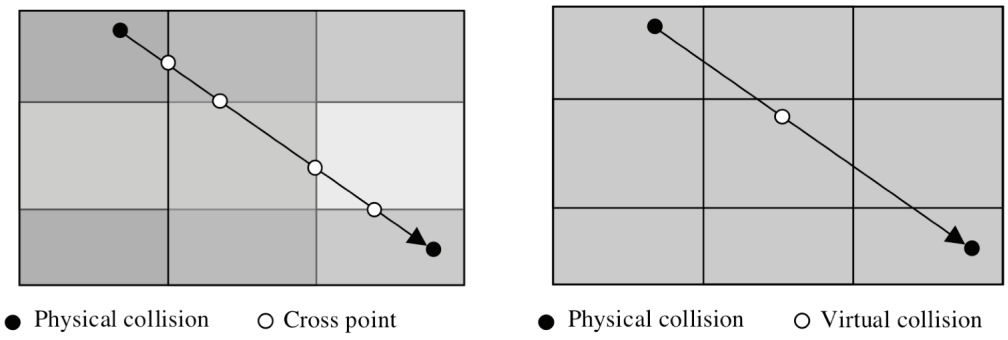


図 4.1.1　光子のトレースの模式図。左：通常の方法，右：MCS 法を用いた場合

4.1.2 MCS 法の効率についての考察

では MCS 法はどんな条件でも有効に働くのかというとそうではない。もし最大消散係数が平均的消散係数に比べて非常に大きかったらどうなるか？物理的な衝突点に達するまでに非常に多くの仮想的な衝突が起きることになり, かえって効率が低下してしまう。図 4.1.2 に病的な例を示す。

MCS 法が有効に働かない場合とは物理的衝突の確率 $\beta_e/\beta_{\max}$ が平均的に小さい場合である。同様の議論は Városi and Dwek (1999) にも書かれている。MCS 法の効率は一般に以下の条件で優れたものとなる。

1) ボクセルサイズが平均パス長と比べて小さい：消散係数が比較的小さい
2) 媒体が比較均質に近い：消散係数の不均質性が小さい

一般に雲を含んだ大気では雲内に消散係数の最大値があり，その値は大きい。モデル大気全体にその最大消散係数を使って MCS 法を適用するのは効率的ではない。全体の領域を分割して各サブ領域（「超ボクセル」）内で MCS 法を適用するのが良い。よってモンテカルロシミュレーションの前処理として，上の条件のいずれかを満たす「超ボクセル」を上手に構成する事が大事である。

具体的には，上の条件に以下のしきい値を設けて，前処理でボクセルを少しずつマージしていき，条件を満たさなくなるまで大きな超ボクセルを構成する。

1) 最大消散係数が平均消散係数の A 倍以下
2) 最大消散係数の逆数（平均のパス長）が超ボクセルのサイズの B 倍以上

これらの条件が満たされている限りできるだけ大きな超ボクセルを構成した方が効率的である。

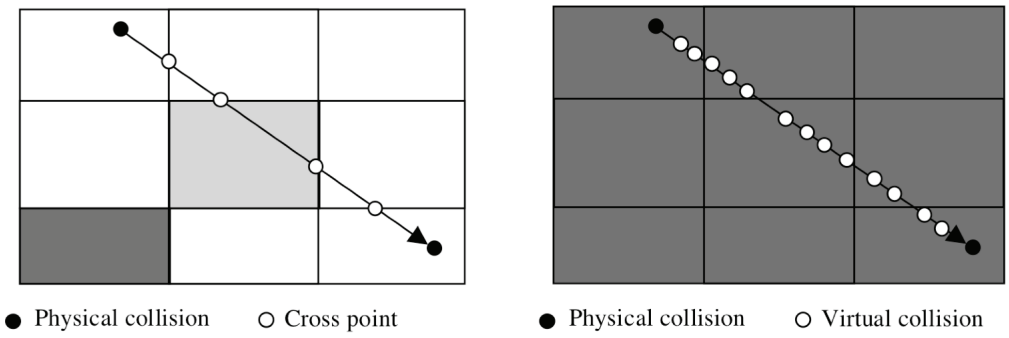


図 4.1.2 光子のトレースの模式図（MCS 法が有効でない場合）。左：通常の方法，右：MCS 法を用いた場合

4.2 分散減少法

モンテカルロ積分の結果はサンプリング数が多いほど分散（ノイズ）が小さい。しかし一般にサンプリング数に比例して計算時間がかかる。分散減少法とは少ない計算時間で分散の小さな結果を得る，つまり計算効率を改善する技法である。そのうちのいくつかは既に前章で述べた（例えばロシアンルーレット法など）。ここではその他の分散減少法についてまとめる。Marchuk et al. (1980) や Booth (1985), Iwabuchi (2006)なども参考になる。Los Alamos National Laboratory X-5 Monte Carlo Team による MCML コードでも優れた分散減少法が組み込まれている。

4.2.1 Exponential transformation 法

衝突点の決定において通常の方法ではその衝突点までの光学的距離が平均 1 の指数分布に従う。透過率は，

$$T(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau} \tag{4.2.1}$$

であり，衝突点までのランダムな光学的距離は，一様乱数ρを用いて

$$\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau = \rho;\ \tau = -\ln(1-\rho) \tag{4.2.2}$$

によって決まる。このときウェイトは一定に保たれる。

今，衝突の確率密度関数（透過率）を以下のように修正する。

$$T'(\tau) = \frac{1}{S}\mathrm{e}^{-\tau/S} \tag{4.2.3}$$

これは積分すると 1 に規格化されている。このとき衝突点までのランダムな光学的距離は，

$$\frac{1}{S}\int_0^{\tau'} \mathrm{e}^{-\tau/S}\, d\tau = \rho \tag{4.2.4a}$$

$$\tau' = -S\ln(1-\rho) = -S\ln\tilde{\rho} \tag{4.2.4b}$$

となる。衝突点までの光学的距離の平均は S である。エネルギーを保存するためには，

$$w'T'(\tau') = wT(\tau') = w\,\mathrm{e}^{-\tau'} \tag{4.2.5}$$

が成り立てば良い。よってウェイトは

$$w' = w\frac{S\,\mathrm{e}^{-\tau'}}{\mathrm{e}^{-\tau'/S}} = wS\exp\left[-\tau'\left(1-\frac{1}{S}\right)\right] = wS\exp\left[(S-1)\ln\tilde{\rho}\right] \tag{4.2.6}$$

となる。このように透過率とウェイトを修正することで衝突点までの光学的厚さを平均 1 ではなく任意の S に変更することができる。$S>1$ とすればモデル光子がより遠くまで飛行し，逆に $S<1$ とすればより近くで衝突が起きることになる。

これを使うと例えば, 過剰な多重散乱によってモデル領域からなかなか抜け出せないモデル光子を $S>1$ に設定して半強制的に脱出させることが可能となる。ただしウェイトが (4.2.6) のようにばらつくことに注意しなければならない。過剰な多重散乱の対応策としてはロシアンルーレット法の方が簡便である。別な応用例は $S<1$ として衝突を強制する場合である（4.2.4 小節参照)。

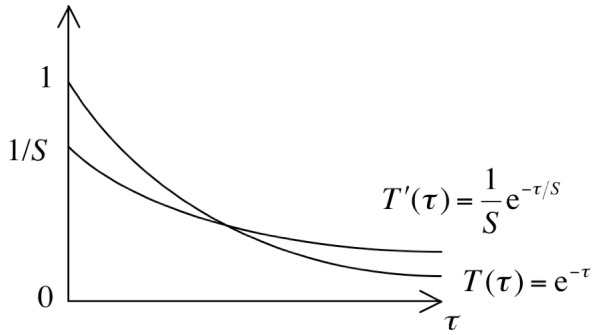


図 4.2.1 Exponential transformation の概念図。衝突の確率密度関数(透過率)。

4.2.2 寄与関数の修正

局所推定法 (LEM) で放射輝度などをサンプリングするとき，以下の量をサンプリングすることになる。

$$\zeta(\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{r}_1) = w\Psi(\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{\Omega}_1)T(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \tag{4.2.7}$$

ここで w は散乱（または反射）後のウェイト，Ψは規格化された角度分布関数 (/str)，T

は散乱点 $\mathbf{r}_0$ からディテクター位置 $\mathbf{r}_1$ までの透過率であり，光学的厚さの関数である。

$$T(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)=\mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)} \tag{4.2.8a}$$

$$\tau(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1)=\int_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1}\beta_e(t)dt;\ \ t=|\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0| \tag{4.2.8b}$$

(4.2.7) のξは特に雲粒による散乱や海面反射の場合に非常にばらつきが大きい。モンテカルロ積分結果のノイズを減らすにはこのξの分散を小さくする必要がある。

a. 小さなξの修正

多くの場合に ξ は比較的小さい。ここではサンプリングするξをある閾値以上に限定する方法を考える。もし $\xi<\xi_{\min}$ であれば，ロシアンルーレット法と同様の原理を使って (4.2.7) の修正を考える。まず，

$$\begin{aligned}&\text{If } w\Psi<\xi_{\min} \text{ and } \rho<w\Psi/\xi_{\min}\text{, then } w\Psi\to\xi.\\&\text{Otherwise,}\qquad\qquad\qquad\qquad w\Psi\to 0.\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

と修正できる。今，

$$\xi_{\min}=w\Psi\,\mathrm{e}^{-\tau_{\max}} \tag{4.2.10}$$

とする。$\tau>\tau_{\max}$ のとき，透過率 T は，衝突点をランダムにサンプリングする手法を応用して，

$$\begin{aligned}&T=\mathrm{e}^{-\tau}=\mathrm{e}^{-\tau_{\max}}\mathrm{e}^{-(\tau-\tau_{\max})}\\&\to\begin{cases}\mathrm{e}^{-\tau} & \text{if } \tau\le\tau_{\max}\\ \mathrm{e}^{-\tau_{\max}} & \text{if } \tau>\tau_{\max} \text{ and } \rho<\mathrm{e}^{-(\tau-\tau_{\max})}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

となる。ここでρは一様乱数である。$T=0$ になったときは勿論サンプリングする必要はない（トレースを中止する）。透過率を図にすると図 4.2.2 のようになる。

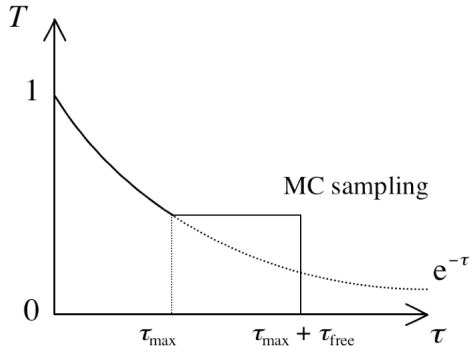


図 4.2.2 透過率のサンプリングの概念図

これら (4.2.9), (4.2.11) を組み合わせて整理すると結局以下の式が得られる (Iwabuchi, 2006)。

When $w\Psi \le \zeta_{\min}$,

$$\zeta' = \begin{cases} \zeta_{\min} & \text{if } \rho_1 \le w\Psi/\zeta_{\min} \text{ and } \tau \le \tau_{\text{free}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.2.12a}$$

When $w\Psi > \zeta_{\min}$,

$$\zeta' = \begin{cases} \zeta & \text{if } \tau \le \tau_{\max} \\ \zeta_{\min} & \text{if } \tau_{\max} < \tau \le \tau_{\max} + \tau_{\text{free}} \\ 0 & \text{if } \tau > \tau_{\max} + \tau_{\text{free}} \end{cases} \tag{4.2.12b}$$

ここで,

$$\tau_{\text{free}} = -\ln \rho_2 \tag{4.2.13a}$$

$$\tau_{\max} = -\ln\left(\frac{\zeta_{\min}}{w\Psi}\right) \tag{4.2.13b}$$

である。τ_{free} と $\tau_{\max}$ は共に衝突点からディテクター間のトレースを開始する前に決めることができる。このようにするとトレースを開始する前，またはトレースの途中で $\zeta' = 0$ となることが判明した時点で，以後のトレースは省略することができる。

以上の方法は二つの効用がある。一つはトレースの回数が減るために計算時間が短縮できること。もう一つはサンプリングされる量は常に閾値以上になるため分散が減るということである。Iwabuchi (2006) によれば雲の反射率を計算する場合 $\zeta_{\min} = 0.3$ 程度にしたとき効率が最大になる。

b. 最大消散係数法の利用

式 (4.2.7) の計算で必要な解析的な透過率 T を求めるためには散乱点 $\mathbf{r}_0$ からディテクターの位置 $\mathbf{r}_1$ までの光学的厚さを求める必要があり，レイトレーシングが必要になる。各ボクセル内の光学的厚さをパスに沿って積分する必要があるため，計算負荷が高い。ここでは MCS 法を用いて透過率を MC 流にサンプリングする方法を考える。

式 (4.2.10) において閾値 $\tau_{\max}$ は $\zeta_{\min}$ に関係づけた。同様に $\zeta_{\min}$ とは独立なパラメータ $\zeta_{\max}$ に結びつけるなら，

$$\zeta_{\max} = w\Psi\,\mathrm{e}^{-\tau_{\max}} \tag{4.2.14}$$

$$\tau_{\max} = \begin{cases} -\ln\left(\dfrac{\zeta_{\max}}{w\Psi}\right) & \text{if } w\Psi > \zeta_{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.2.15}$$

となる。このとき以下の式が得られる。

When $w\Psi \le \zeta_{\min}$,

$$\zeta' = \begin{cases} \zeta_{\min} T'(\tau) & \text{if } \rho_1 \le w\Psi/\zeta_{\min} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.2.16a}$$

When $\zeta_{\min} < w\Psi \le \zeta_{\max}$,

$$\zeta' = w\Psi T'(\tau) \tag{4.2.16b}$$

When $w\Psi > \zeta_{\max}$,

$$\zeta' = \begin{cases} \zeta & \text{if } \tau \le \tau_{\max} \\ \zeta_{\max} T'(\tau - \tau_{\max}) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.2.16c}$$

ここで透過率 T' は，乱数によって決まる。

$$T'(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tau \le \tau_{\text{free}} = -\ln\rho_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.2.17}$$

この定式化は MCS 法を用いるのに都合が良い。T' をサンプリングするとき MCS 法を用いて，物理的な衝突が起きる直前まで $T' = 1$ とし， 物理的な衝突が起きたらトレースを終了する。

以上の方法を用いる場合のアルゴリズムは以下のようになる。

1) Ψ が小さいときには (4.2.16a) に基づいて，サンプリングされる量を $\zeta_{\min}$ 以上に修

正する。0 になったときは終了。そうでないときは$\tau_{\max} = 0$ とする。

2) $\mathbf{r}_0$ からトレースの開始

3) τが$\tau_{\max}$ に達するまで，解析的に（MCS 法を用いずに）光学的厚さを積分する。途中で $\mathbf{r}_1$ に達したら，(4.2.16a) の一つ目の式で解析的なζをサンプリングする。

4) $\tau = \tau_{\max}$ となる点から，MCS 法を適用開始

5) 衝突の度に乱数によって物理的な衝突なのか，数学的な衝突なのかを決める

6) 物理的な衝突が起きたらトレース終了。$\mathbf{r}_1$ に達したら (4.2.16a,b,c) に $T' = 1$ を代入して計算。結局この時点でサンプリングされる量は，以下のようになる。

$$\zeta' = \begin{cases} \zeta_{\min} & \text{if } w\Psi \le \zeta_{\min} \\ w\Psi & \text{if } \zeta_{\min} < w\Psi \le \zeta_{\max} \\ \zeta_{\max} & \text{if } w\Psi > \zeta_{\max} \end{cases} \tag{4.2.18}$$

4.2.3 トランケーション近似

LEM でサンプリングされる (4.2.7) の量は角度分布関数Ψを含んでおり，散乱の場合はこれが散乱位相関数に比例する。よって散乱位相関数 $P(\Theta)$ が鋭いピークを持っている場合にその桁違いに大きな値が稀にサンプリングされることになる。よって (4.2.7) の積分計算は収束が遅く，ノイズが著しい (Barker et al., 2003)。雲粒や大粒子エーロゾルによる散乱の場合，前方散乱が卓越し，$\Theta = 0°$付近のピークは非常に大きい（10^4 程度にもなる）。

この問題に対処するためには truncation approximations が有効である (Iwabuchi. 2006)。一般的な truncation approximation では，前方散乱ピークをディラックのデルタ関数で近似し，位相関数のを次のように近似する。

$$P(\Theta) \approx 2 f_\delta \delta(\Theta) + (1 - f_\delta)\hat{P}(\Theta), \tag{4.2.19}$$

ここで $\hat{P}$ は「切断された位相関数」である。f_δを delta fraction と呼ぶ。前方散乱の部分は透過するのと等しい。よって similarity relations (e.g., Liou, 1992) により，消散係数や一次散乱アルベドは,

$$\hat{\beta}_{\mathrm{e}} = \beta_{\mathrm{e}}(1 - f_\delta \omega), \tag{4.2.20}$$

$$\hat{\omega} = \omega \frac{1 - f_\delta}{1 - f_\delta \omega}, \tag{4.2.21}$$

となる。放射伝達は $\hat{\beta}_{\mathrm{e}}$, $\hat{\omega}$, and $\hat{P}$ をもって近似的に計算できる。ここで $\hat{P}$ をどのように定義するかによって様々な方法がある(e.g., Nakajima and Tanaka 1988; Antyufeev 1996;

Thomas and Stamnes 1999; Modest 2003)。厳密には前方散乱のピークはデルタ関数ではなく，ここで述べている方法はどれも近似である。よってバイアスが生じる。できる限りバイアスの小さな方法が望ましい。

表 4.2.1 トランケーション近似における光学特性の変化

媒体	消散係数	一次散乱アルベド	散乱位相関数
Original	β_e	ω	$P(\Theta)$
Approximated	β_e	ω	$2f_\delta\delta(\Theta)+(1-f_\delta)\hat{P}(\Theta)$
Transformed	$\hat{\beta}_e$	$\hat{\omega}$	$\hat{P}(\Theta)$

a. Delta-isotropic approximation

変換後の位相関数が等方散乱の場合が delta-isotropic approximation (transport approximation とも言う) である。この場合

$$\hat{P}(\Theta)=1 \tag{4.2.22}$$

であり，計算が非常に簡単になる。Truncation approximation が高精度（小さいバイアス）を達成するには近似された位相関数（4.2.19 の右辺）のモーメントがオリジナルに近いということが重要である。位相関数の 1 次モーメント (asymmetry factor) を g_1 とする。

$$g_1=\frac{1}{2}\int_0^\pi P(\Theta)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.23}$$

一次モーメントの保存：

$$g_1=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[2f_\delta\delta(\Theta)+(1-f_\delta)\hat{P}(\Theta)\right]\cos\Theta\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.24}$$

を必要条件として考えると，

$$\begin{aligned} g_1 &= f_\delta\int_{-1}^1\delta(\cos\Theta-1)\cos\Theta d\cos\Theta+(1-f_\delta)\frac{1}{2}\int_{-1}^1\hat{P}(\Theta)\cos\Theta d\cos\Theta \\ &= f_\delta+(1-f_\delta)\times 0 \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

$$\therefore f_\delta=g_1 \tag{4.2.26}$$

が得られる。すなわち delta fraction は一意に決まる。

この方法は放射輝度の計算ではバイアスが非常に大きく，実用的ではない。フラックスや加熱率の計算では拡散光（二次散乱以上）についてこの方法を使うとバイアスは小さい。計算が簡単になり，散乱回数が減るために光学的に厚い大気では有効である。例えば $g_1 = 0.86$ の場合は，(4.2.26) を (4.2.20) に代入すると，消散係数が 0.14 倍に小さくなる。消散係数におよそ比例して散乱回数も減るため計算時間が大幅に短縮される。

b. Delta-Heyney-Greeenstein approximation

変換後の位相関数が Heyney-Greenstein 関数の場合がこれである。一次モーメントを $\hat{g}_1$ として，

$$\hat{P}(\Theta) = \frac{1-\hat{g}_1^2}{\left[1-2\hat{g}_1\cos\Theta+\hat{g}_1^2\right]^{3/2}} \tag{4.2.27}$$

である。(4.2.24) 同様に近似された位相関数（4.2.19 の右辺）の一次モーメントがオリジナル g_1 に等しいという条件を与えると，

$$g_1 = f_\delta + (1-f_\delta)\hat{g}_1 \tag{4.2.28}$$

$$\therefore \hat{g}_1 = \frac{g_1 - f_\delta}{1-f_\delta} \tag{4.2.29}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} &\text{If } 0 \le \hat{g}_1, \text{ then } f_\delta \le g_1 \\ &\text{If } -1 \le \hat{g}_1, \text{ then } f_\delta \le \frac{1}{2}\left(g_1+1\right) \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

が成り立つ。(4.2.28) は (4.2.30) を満たす任意の f_δ について成り立つので，f_δ の与え方には自由度がある。

この方法は前節の方法よりは高精度であるが, やはり放射輝度の計算には実用的でない。

c. Forward-end truncation approximation (FTA)

変換後の位相関数がオリジナルの位相関数の前方部分を垂直に切断して規格化した

ものを考える。

$$\hat{P}(\Theta) = \begin{cases} P(\Theta)/f_{\mathrm{t}} & \text{for } \Theta \geq \Theta_{\mathrm{f}} \\ 0 & \text{for } \Theta < \Theta_{\mathrm{f}} \end{cases} \tag{4.2.31}$$

ここで，f_{t}は，

$$f_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\pi} P(\Theta)\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.32}$$

で与えられる。切断点の角度Θ_{f}はやはり一次モーメントの保存条件 (4.2.24) より決める。

$$\begin{aligned} \hat{g}_1 &\equiv \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \hat{P}(\Theta)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta \\ &= \frac{1}{2f_{\mathrm{t}}}\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\pi} P(\Theta)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

とすると，

$$g_1 = f_\delta + (1 - f_\delta)\hat{g}_1 \tag{4.2.34}$$

$$\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\pi} P(\Theta)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta = \frac{g_1 - f_\delta}{1 - f_\delta}\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\pi} P(\Theta)\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.35}$$

を（数値的に）解けばΘ_{f}が決まる。f_δの与え方には自由度があり，Iwabuchi (2006) では光の非等方性を考慮して等方的に近くなるほどf_δが増加するように設定している。

この方法は前二節の方法よりも格段に高精度である。(4.2.31) の形は前方部分を除けばオリジナルの形を保っていることが高精度を保証していると考えられる。放射輝度の計算にも十分に活用できる。Iwabuchi (2006) のようにf_δを設定した場合，太陽周辺光のを除いて放射輝度のバイアスは約 0.5%以下である。

式 (4.2.31) の形にはもう一つメリットがある。変換後の位相関数がオリジナルの位相関数と部分的に相似なため位相関数の LUT や散乱角を決めるときに必要な逆参照 LUT にオリジナルのものを利用できることである。この LUT は比較的大きなメモリ領域を必要とするが, (4.2.31) の形になっていれば truncation approximation を使った場合も特別に LUT を用意する必要がない。特に散乱次数によってf_δを変える場合に有効である。

d. Dual-end truncation approximation

前節と同様に今度は位相関数の両端を切断する方法を考える。後方散乱部分を切り取るのは単に自由度を二つにして，一次と二次のモーメントの保存を拘束条件にするためである。変換後の位相関数は，

$$\hat{P}(\Theta)=\begin{cases}P(\Theta)/f_{\mathrm{t}} & \text{for } \Theta_{\mathrm{f}}\le\Theta\le\Theta_{\mathrm{b}}\\ 0 & \text{for } \Theta<\Theta_{\mathrm{f}} \text{ or } \Theta>\Theta_{\mathrm{b}}\end{cases} \tag{4.2.36}$$

とする。ここで，f_{t}は，

$$f_{\mathrm{t}}=\frac{1}{2}\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\Theta_{\mathrm{b}}}P(\Theta)\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.37}$$

である。今二次までのモーメントをそれぞれ

$$g_1\equiv\frac{1}{2}\int_0^{\pi}P(\Theta)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.38a}$$

$$g_2\equiv\frac{1}{2}\int_0^{\pi}P(\Theta)\cos^2\Theta\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.38b}$$

とし，同様に，

$$\hat{g}_1\equiv\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\hat{P}(\Theta)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta=\frac{1}{2f_{\mathrm{t}}}\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\Theta_{\mathrm{b}}}P(\Theta)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.39a}$$

$$\hat{g}_2\equiv\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\hat{P}(\Theta)\cos^2\Theta\sin\Theta d\Theta=\frac{1}{2f_{\mathrm{t}}}\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\Theta_{\mathrm{b}}}P(\Theta)\cos^2\Theta\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.39b}$$

とする。二つのモーメントの保存：

$$g_1=f_\delta+(1-f_\delta)\hat{g}_1 \tag{4.2.40a}$$

$$g_2=f_\delta+(1-f_\delta)\hat{g}_2 \tag{4.2.40b}$$

を必要条件とすると，連立方程式

$$\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\Theta_{\mathrm{b}}}P(\Theta)\cos\Theta\sin\Theta d\Theta=\frac{g_1-f_\delta}{1-f_\delta}\int_{\Theta_{\mathrm{f}}}^{\Theta_{\mathrm{b}}}P(\Theta)\sin\Theta d\Theta \tag{4.2.41a}$$

$$\int_{\Theta_f}^{\Theta_b} P(\Theta)\cos^2\Theta\sin\Theta d\Theta = \frac{g_2 - f_\delta}{1 - f_\delta}\int_{\Theta_f}^{\Theta_b} P(\Theta)\sin\Theta d\Theta \qquad (4.2.41b)$$

を（数値的に）解いてΘ_f, Θ_bが決定する。

f_δの与え方はやはり自由度があり，光の非等方性を考慮して等方的に近くなるほど f_δ が増加するように設定すると高精度が得られる (Iwabuchi 2006)。この方法は前節の方法よりも若干高精度である。Iwabuchi (2006) のようにf_δを設定した場合，太陽周辺光のを除いて放射輝度のバイアスは約 0.2%以下である。この方法を使うと放射輝度の計算効率が格段に向上することがわかっている。また FTA と同様に位相関数の LUT や散乱角を決めるときに必要な逆参照 LUT にオリジナルの LUT を利用できる。

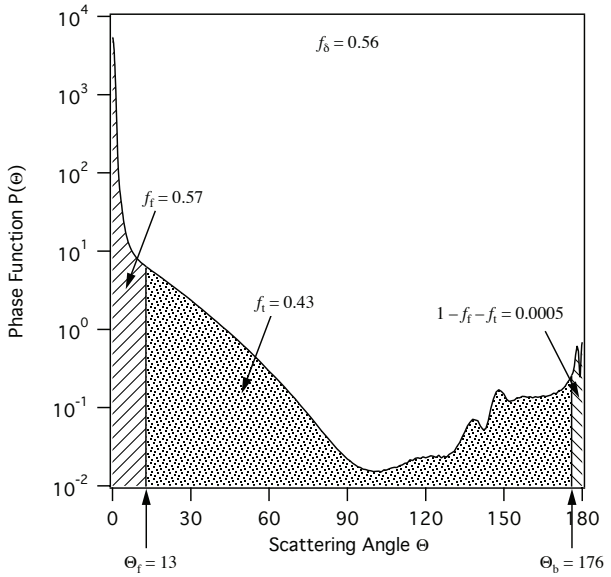


図 4.2.3 DTA の例。雲粒有効半径 10μm, 可視光 0.67μm の散乱位相関数と切断近似した場合のパラメータ。

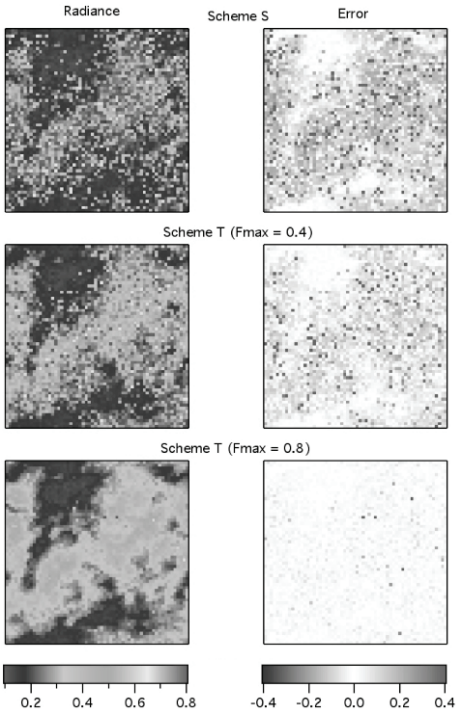


図 4.2.4 DTA を使わない場合（scheme S）と使った場合（scheme T）の放射輝度の計算例。一画素あたり 1000 個の光子を入射させた。右側に誤差を示す。$F_{\max}$ が大きいほど delta fraction が大きく設定される。

4.2.4 衝突強制法

光学的に薄い媒体では衝突の頻度が小さいため，加熱率や LEM を用いた放射輝度など衝突イベントに伴ってサンプリングされる量はサンプリング頻度が小さい。このような場合の計算効率を改善するためには衝突強制法 (collision-forcing method) が有効である。以下に三つの方法を述べる。

a. スケーリング変換を用いる方法

Similarity relations (e.g., Liou, 1992) に基づいたスケーリング変換を用いると，消散係数を任意の値に増大させることができる (Iwabuchi, 2006)。消散係数を任意の定数 $1/f_{\mathrm{e}}$ 倍にすると，

$$\beta'_{\mathrm{e}} = \frac{\beta_{\mathrm{e}}}{f_{\mathrm{e}}} \tag{4.2.42}$$

である。一次散乱アルベドと散乱位相関数は,

$$\omega' = 1-(1-\omega)f_{\mathrm{e}} \tag{4.2.43}$$
$$P'(\Theta) = 2f_{\mathrm{d}}\delta(\Theta)+(1-f_{\mathrm{d}})P(\Theta) \tag{4.2.44}$$

となる。ここで,

$$f_{\mathrm{d}} = \frac{1-f_{\mathrm{e}}}{1-(1-\omega)f_{\mathrm{e}}} = (1-f_{\mathrm{e}})/\omega' \tag{4.2.45}$$

である。つまり本来は「透過光」であるものの一部を散乱角 0 度の前方散乱として扱うのである。同様の原理は MCS 法でも利用されている。消散係数が増加して散乱回数が増える分，一次散乱アルベドは 1 に近くなり（吸収が弱くなり），散乱位相関数も前方散乱が強くなる。表にまとめると表 4.2.2 のようになる。

表 4.2.2 スケーリング変換を用いた衝突強制法による光学特性の変化

媒体	消散係数	一次散乱アルベド	散乱位相関数
1	β_{e}	ω	$P(\Theta)$
2	$\frac{\beta_{\mathrm{e}}}{f_{\mathrm{e}}}-\beta_{\mathrm{e}}$	1	$2\delta(\Theta)$
1+2	$\beta'_{\mathrm{e}} = \frac{\beta_{\mathrm{e}}}{f_{\mathrm{e}}}$	$\omega' = 1-(1-\omega)f_{\mathrm{e}}$	$P'(\Theta) =$ $2f_{\mathrm{d}}\delta(\Theta)+(1-f_{\mathrm{d}})P(\Theta)$

この表で，オリジナルの媒体 1 は媒体 (1+2)と等価である。この変換は数学的に正しくバイアスは生じない。

この方法を用いる場合プライムのついたパラメータ (4.2.42–44) で計算が行われる。LEM で用いられる位相関数は (4.2.44) より $(1-f_{\mathrm{d}})P(\Theta)$となる。散乱方向を決定する場合，その散乱イベントは確率f_{d}で仮想的な散乱（散乱角 0 度の散乱）であるので，乱数とf_{d}を比較して，仮想的な散乱のときは散乱させない。

この方法を使うと消散係数を任意の大きな値にスケーリングすることができ, 衝突イベントの頻度が増す。最も簡単で効率的な衝突強制法である。

b. 区間内強制サンプリング

3.4 節で述べたように，任意のパスの中で仮想的な衝突をサンプリングすることがで

きる。光学的距離が$\Delta\tau$のパスの中で衝突の起きる確率は,

$$C(\Delta\tau) = 1 - \mathrm{e}^{-\Delta\tau} \tag{4.2.46}$$

である。この区間内のランダムな位置で衝突が起きるとすると，その位置までの光学的距離τは,

$$\frac{C(\tau)}{C(\Delta\tau)} = \rho \tag{4.2.47}$$

$$\therefore \mathrm{e}^{-\tau} = 1 - \rho\left(1 - \mathrm{e}^{-\Delta\tau}\right) \tag{4.2.48}$$

によって決まる。このパスの初期位置における光子のウェイトを w_0 とし，(4.2.48) でランダムに決まる衝突点における一次散乱アルベドを$\omega(\tau)$ とすれば，吸収・散乱されるウェイトは，それぞれ

$$w_{\mathrm{abs}} = w_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\Delta\tau}\right)\left[1 - \omega(\tau)\right] \tag{4.2.49a}$$

$$w_{\mathrm{sca}} = w_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\Delta\tau}\right)\omega(\tau) \tag{4.2.49b}$$

と与えられる。これらのウェイトが加熱率や LEM のサンプリングで用いられる。乱数によって衝突するのか，パスの終点まで透過するのかを決めることができる。同様に，3.4 節の「吸収をパス長から計算する方法」で述べたように吸収のみを強制的にサンプリングしたり，または散乱のみを強制的にサンプリングすることも可能である。

この方法は興味を抱いている任意の領域で衝突を高い頻度でサンプリングしたいときに便利である。

c. Exponential transformation 法

4.2.1 小節で述べた方法で $S < 1$ とすれば衝突が起きやすくなる。しかしこの方法の問題点は衝突後のウェイトが (4.2.6) に従い，S から無限大にばらつくことである。そのような量をサンプリングした場合，ノイズが大幅に増大するため推薦できない。

4.2.5 数値拡散

通常のモンテカルロモデルではフラックス，加熱率，放射輝度などのサンプリングは局所的な点において行われる。これをその点の周りのある水平方向に広がった有限な面

積をもつ領域で行えば，サンプリングノイズの削減に役立つ。一回にサンプリングされるエネルギーを分割して本来局所的にサンプリングされるべき点の周りに分布させる。分割されたエネルギーは各サブピクセルにおいてサンプリングされる。光子の軌跡自体は変更せず，放射量のサンプリングのときにのみ仮想的に水平方向の拡散を考える。水平方向にのみ拡散させれば水平領域平均の放射量はバイアスを生じない。

例として Iwabuchi (2006) では分割サンプリングされる領域を単に長方形領域とし，その中でエネルギーを均等に分布させる方法を提案している。その領域の幅は入射する光子の数，光の非等方性，サンプリングされるエネルギーの大きさなどに関連づけて決めている。

この方法は純粋に数値的な技法であり，拡散させる領域の幅を理論的に決めることはできない。領域の広さの決定にはチューニングが必要で，広くすればノイズは減り見栄えの良い滑らかな結果が得られる。しかし，あまり過度に広くすれば計算時間が増大しスムージングによる artifacts も大きくなる。

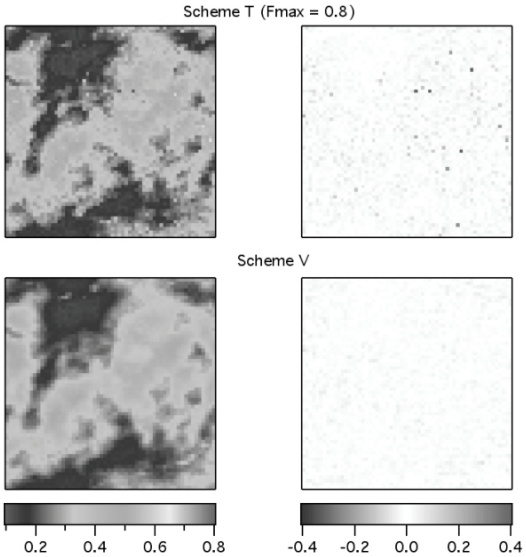


図 4.2.5 数値拡散を使わない場合（scheme T）と使った場合（scheme V）の放射輝度の計算例。一画素あたり 1000 個の光子を入射させた。右側に誤差を示す。

4.2.6 直達光と一次散乱光の半解析的計算

一般にモンテカルロ積分のノイズを減らすには，解析的に計算できる部分は解析的に計算するということが重要である。太陽放射伝達に関しては直達光と一次散乱光は半解析的に計算することができる。ある一点での直達光の放射照度は解析的に決まる。そ

の点から太陽まで光線追跡して光学的厚さを求め，入射放射照度に exp(−τ)を乗じればよい。同様に局所的な一次散乱の加熱率も解析的に計算できる。しかし，ある領域平均の放射照度や加熱率を求めるにはその領域についての積分を数値的な方法に頼らざるをえない。なぜなら三次元不均質な系では，直達光の放射照度が各点で異なるからである。従って領域平均の直達・一次散乱光の放射量の計算は半解析的となる。

半解析的に計算するとして，放射量を求める対象領域からバックワード型の光線追跡をする方法と，逆に太陽から直達光の進む向きに光線追跡を行うフォワード型の方法が考えられる。バックワード型は放射量を計算する領域が多数あるときに，多数の光線追跡が必要なため効率的に不利である。そのような場合はフォワード型の方が適している。領域についての積分の方法はいろいろ考えられるが，最も簡単なのは，大気上端に光線を等間隔に配置して対象領域に入った光線のウェイトを使って放射量を積算する方法である。これはモンテカルロ法のアルゴリズムと非常に似ているが，以下の点で異なる。1) MC 法では通常は大気上端の入射位置を乱数を使って決めるため光子の位置はランダムであるが，半解析的方法では等間隔であり，同じ大きさの水平断面は常に一定の数の光線によって貫かれる；2) MC 法では乱数によって決められた衝突点までしか光線追跡されないが，半解析的方法ではモデル領域の最下端まで光線追跡が行われる。これらの違いにより，MC 法よりも精度の良い計算が可能である。光線の数を指定することで計算時間と精度のトレードオフを調整することができる。少ない光線の数で高精度を得るには空間についての内挿法や求積法を工夫することが重要である。直達光放射照度と一次散乱の加熱率の計算アルゴリズムとしては 3.8.3 小節で述べた方法と同様である。

光線追跡は負荷が高い計算であり，ここで述べた方法では 4.1 節で述べた最大消散係数法のようなトリックは使えない。従って効率的な計算のためには様々な工夫が必要となるかもしれない。例えば，トレースしていって光学的厚さがある程度以上大きくなったら 3.8.2 小節で述べたように MC 法に切り替えて，一次散乱が起きた点でトレースを止めるという方法が有効と考えられる。また，モデル領域が非常に細かく再分割されている場合で光学的に薄い層を光線が通過するときにはその層の中では MC 法と最大消散係数法を用いる，など MC 法との組み合わせが有効な場合も考えられる。

この計算方法の別な利点として，直達光放射照度と一次散乱の加熱率は光学特性のの異なる複数の波長について計算できることが挙げられる。一回のトレースで各波長についての解析的な放射量が計算できるため，多くの波長について計算する場合や波長積分した放射量を求める場合に効率的である。

一次散乱光の放射強度についても同様に半解析的に計算することができる。この場合もフォワード型・バックワード型両方のトレース方法が考えられる。

4.3 並列化

通常モンテカルロ法では多数のモデル光子をレイトレースする必要があるため，複雑な系のシミュレーションを実行する場合には，かなりの計算時間を要する。複数の CPU に計算ジョブを分配させる並列計算はモンテカルロ法による放射伝達計算でも計算速度向上の有効な手法の一つである。ここでは，モンテカルロ放射伝達計算の並列化に伴う入射モデル光子の扱いについて記述する。

4.3.1 並列プログラミング

並列化用の計算システムには，様々なハードウエア・ソフトウエアアーキテクチャが存在する。メモリとプロセッサの依存関係に注目すると，分散メモリ型並列計算と共有メモリ型システムに大別することができる。共有メモリ型システムは，その名の通り，ネットワークでつながったメモリとプロセッサからなるシステムである。一方，分散メモリ型システムでは各プロセッサ自身が専用メモリを持つシステムである。この分散メモリ型システムにおいては，各プロセッサ間のデータ交換・データ共有を行う手法としてメッセージパッシングが広く利用されている。その中でも，最も普通に使われる手法は MPI (Message Passing Interface)である。

並列プログラムの設計には，２つのアプローチがある。データパラレルアプローチは，データを各プロセスに割り振り，各プロセスはこのデータを用いて，同じようなタイプの計算処理を行うものである。コントロールパラレルアプローチは，プロセス間で実行したいタスクを分割し，各プロセス間では異なるタイプの計算処理を行う方法である。

本章では以下の説明で，MPI を用いた並列化を行うことを念頭に議論を進める。特に，プログラムソースコードの開発や拡張性の容易さなどでメリットがあるデータパラレルアプローチを用いること前提とする。なお，並列プログラミングについては他書(例えば Pacheco, 1997)を参考されたい。

4.3.2 モンテカルロ法における並列計算法 I: 光子群分割型

ここでは，N_{prc} 個のプロセッサで合計 n 個のモデル光子の計算を分担して行う方法を考える。モンテカルロ法を N_{prc} 個の独立なプロセッサで行う場合，プロセッサ毎に互いに独立な疑似乱数列を用意する必要がある。この場合，プロセッサ毎に異なる乱数列の初期値（Initial seed）を用意して乱数列を発生させる方法がアルゴリズム的に最も容易である。

最も簡単な並列化手法は各プロセッサで N / N_{prc} のモデル光子のシミュレーションを独立に行い, 最終的にサンプリングされた各物理量を一つのプロセッサに集めて物理量の統計値を計算するものである。以下に簡単な並列計算手順を示す。

i) 各プロセッサで計算するモデル光子数($= N / N_{prc}$)及び乱数の初期値の決定
ii) 各プロセッサでモンテカルロ計算を実行
iii) すべてのプロセッサで計算が終わるまで他のプロセッサの処理を中断
iv) すべてのプロセッサで計算が終わった段階で，1 つのプロセッサに計算結果を集約し，各物理量の統計値を計算

情報の伝達は最初と最後のみであり，伝達する情報量も比較的少ない。モンテカルロ法による放射伝達計算のほとんど全てが並列に行われる。光子の数が十分に多い場合は各プロセッサの計算時間が均等になり，並列化の効率が極めてよくなる傾向がある。

この方法では並列化が極めて容易であり，若干のプログラム修正ですぐに効率的な並列化計算を行うことができる。反面，すべてのプロセッサに帰属するメモリに計算を行う系のすべての情報を保持させる必要があるため, メモリ資源が大量に消費される場合もある。

使用するメモリ量を減らすには，光学特性などの三次元分布のデータを例えば一つの（または少数の）親プロセッサのメモリに集中させる方法が考えられる。その親プロセッサはデータの伝達のみを担当する。子プロセッサは上述と同じように光子群についての計算を分担して行い, データが必要となったときに親プロセッサから情報を受け取る。伝達する情報としては, 構成媒体それぞれの局所的な消散係数, 一次散乱アルベド, 位相関数の種類の番号などであり, 少なくとも光子が衝突イベントを起こす度に情報の受け渡しが必要となる。しかし伝達する情報量は比較的小さい。特に 4.1.1 小節で述べた最大消散係数法を使うと効率的である。

4.3.3 モンテカルロ法における並列計算法 II: 空間分割型

各プロセッサのメモリを効率的に利用する方法として，各プロセッサに特定の空間領域のデータとその領域における計算を割り当てる方法が考えられる。この方法では各プロセッサで消費するメモリが大幅に節約出来るため, 単一プロセッサの場合に比較して多くのグリッドで計算することが可能になる（つまり，より広域の計算やより詳細なグリッド間隔でのシミュレーションが可能になる。)。その一方で，アルゴリズムは若干複雑である。例えば図 4.3.1 のように x, y 軸方向に分割した(i, j) 番目の計算領域に入射したモデル光子をレイトレースした結果，モデル光子が(i, j) 番目の計算領域から$(i+1,j)$

番目の計算領域に射出したとする。この際に，隣接する領域を受け持つプロセッサにモデル光子の位置・重み・射出方向などの情報を送る必要がある。逆に他の計算領域から入射するモデル光子の情報を受け取る場合もある。モンテカルロ法で使用するモデル光子の数は膨大であり，個々のモデル光子が計算領域から射出・入射する度に，当該プロセッサ間で情報交換をすると，プロセッサの処理能力よりもデータ転送速度の限界で計算速度が制約されてしまう可能性が高く，計算効率が十分に高まらないことになる。

従って，計算効率をなるべく減少させずに，モンテカルロ計算を行う為には，プロセッサ間のモデル光子の情報の伝達量を減らす必要がある。そのため各プロセッサが担当する空間領域はある程度広く設定するのがよい。またレイテンシ (Pacheco, 1997) の問題を考えると，少量の情報を多数回伝達するのは効率的ではない。そのためプロセッサ間のモデル光子の情報交換をある程度まとめて行う方法が考えられる。これは，各プロセッサの担当する計算領域から射出されたモデル光子のデータを一時的に各プロセッサのメモリに保管しておき，モデル光子が計算領域から射出されたら次のモデル光子でレイトレースをスタートさせる。そして，射出されたモデル光子のデータがある程度まとまった段階で隣接領域を受け持つプロセッサに送信する。

別な問題点としては，不均質な媒体を単純に均等に空間分割すると，ある領域では散乱がたくさん起こり，また別なところでは少ない，など各プロセッサの分担する計算量の不均衡が現れることである。対策として計算量が均等になるような工夫が必要である。例えば，空間をプロセッサの数よりも多数に分割し，各プロセッサは複数の分割領域を担当し，どこを担当するかを乱数によってランダムに決めるという方法が考えられる。または，計算が早く終わったプロセッサが終わっていないプロセッサの計算を助けるという方法も考えられる（コーディングは難しいと思われる）。

以上の方法は並列プログラムの設計方法の例であるが，シミュレーションを行う全計算領域内の光学的性質の空間的な均一性・不均一性などの違いによって，効率等が異なるため，シミュレーション空間の特性（空間サイズや不均一性）を考慮して設計する必要がある。

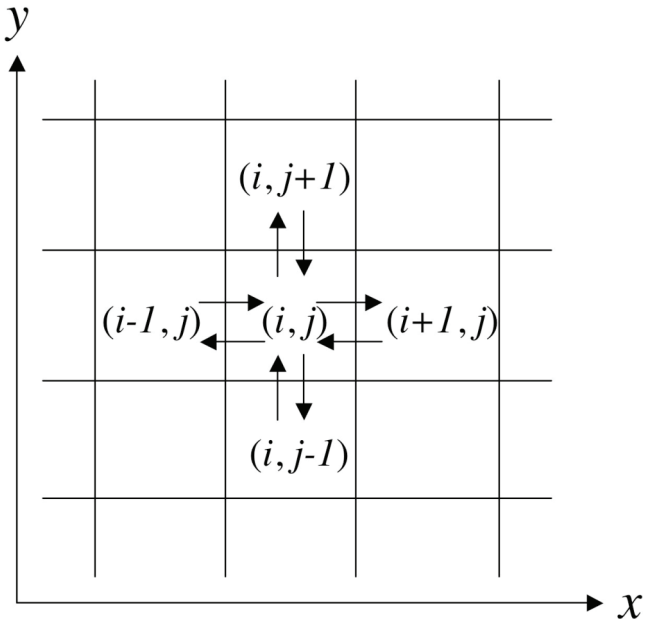


図 4.3.1　計算領域間のデータ交換

第５章　モデルの紹介と計算例

5.1 簡単なモンテカルロ放射コード

簡単な系の放射伝達計算はMC法を使えば容易にコードを作成することができる。例としてここではランバート面上の均質な平行平板大気についてのモンテカルロ放射伝達モデルのコードの例を示す。平行平板大気であるので，水平方向の位置や方向ベクトルの x, y 成分を計算する必要がなく，単純なコードとなっている。散乱は等方散乱を仮定している。反射率・透過率・吸収率に加え，大気上端での天頂方向の反射放射輝度を局所推定法を用いて計算している。散乱または反射イベントの後で，ウェイトが小さいときにはロシアンルーレット法を適用している。

ここで示す例は非常に短いコードであるが，これだけでも，任意の太陽天頂角で任意の光学的厚さと一次散乱アルベド, 地表面反射率の場合について放射照度と放射輝度の高精度なシミュレーションができる。モダンなパソコンであればモデル光子100000個について計算するのは0.5秒程度である（光学的厚さ10のとき）。このときの精度は放射照度と放射輝度共に 0.3%の程度である。また，例えばこのコードを以下のように拡張するのも容易である。

- 放射照度と加熱率を直達光と拡散光に分けて計算する
- 任意の方向の放射輝度を計算する
- 鉛直方向に多層に分割して，鉛直一次元のモデルにする
- 任意の散乱位相関数を考慮した散乱のシミュレーション
- 気体, エーロゾル, 雲水など複数の媒体の光学特性を与え, 混合媒体として扱う。加熱率をそれぞれの媒体について別々に計算する。

サンプルコードの中の rand()という関数は通常 UNIX, Linux システムで利用できる組み込み関数の一つであるが，任意の乱数生成関数に置き換えてもよい。表 5.1.1 に大気の光学的厚さを変化させたときの計算結果を示す。

サンプルコード mcpp.f

```
      program mcpp
!*********************************************************************
! Demo program of Monte Carlo radiative transfer model for
! plane-parallel homogeneous atmosphere on Lambertian surface
!****
      implicit none
! Input
      integer iseed, nph, nsmax
      real the0, tau, omg, alb, dz, wrr
! Work
      integer iph, is
      real ext, afp, uz0, w, z, uz, ftau, znew, rad, pi
      real rand
      parameter (pi = 3.141592653, rad = pi/180.0)
! Work/Output
      double precision r, t, a, eu

! User variables
      iseed = 11                ! initial seed for random number generator
      nph = 100000              ! # of photons
      nsmax = 1000              ! max # of collisions
      the0 = 60.0*rad           ! solar zenith angle
      tau = 2.0                 ! optical thickness of the atmosphere
      omg = 0.99                ! single scattering albedo
      alb = 0.2                 ! surface albedo
      dz = 1000.0               ! geometrical thickness (m) of the atmosphere
      wrr = 0.5

! Initializations
      w = rand(iseed)           ! dummy for random number initialization
      ext = tau/dz              ! extinction coefficient (/m)
      afp = 1.0/ext             ! average free path (m)
      uz0 = -cos(the0)          ! downward incidence
      r = 0.0
      t = 0.0
      a = 0.0
      eu = 0.0

! Monte Carlo simulation
      do iph = 1, nph
         w = 1.0
         z = dz                 ! source from top
         uz = uz0
         do is = 0, nsmax
            ftau = -log(max(1.0e-35, rand(0))) ! free optical thickness
            znew = z + uz * ftau * afp
            if (znew .ge. dz) then       ! escape
               r = r + w
               exit
            else if (znew .le. 0.0) then ! Lambertian reflection
               t = t + w
               z = 0.0
               uz = sqrt(rand(0))
               w = w * alb
               eu = eu + w * exp(-dz*ext)
            else                         ! isotropic scattering
               a = a + w * (1.0 - omg)
               z = znew
               uz = 1.0 - 2.0 * rand(0)
               w = w * omg
               eu = eu + w / 4.0 * exp(-(dz - z)*ext)
            end if
            if (w .lt. wrr*0.5) then     ! Russian roulette
```

```
                if (w .gt. wrr*rand(0)) then
                   w = wrr
                else
                   w = 0.0
                   exit
                end if
             end if
          end do
       end do

! Results (normalized quantities)
       r = r/real(nph)            ! TOA upward flux
       t = t/real(nph)            ! BOA downward flux
       a = a/real(nph)            ! Absorptance
       eu = eu/real(nph)          ! pi*(TOA nadir radiance)
       write (*,*) r, t, a, eu

       end
```

表 5.1.1 サンプルコード mcpp の計算結果

τ	R	T	A	Nadir BRF
0.1	0.2589	0.9232	0.00253	0.2267
0.5	0.4267	0.7009	0.01267	0.3369
1	0.5451	0.5387	0.02396	0.4411
2	0.6614	0.3695	0.04295	0.5647
4	0.7511	0.2184	0.07415	0.6729

5.2 大気放射伝達モデルの紹介

5.2.1 放射モデル MCARaTS

放射モデル MCARaTS (Monte Carlo Atmospheric Radiative Transfer Simulator) は大気・海洋・地表面系の三次元放射伝達を扱う多目的モデルである。このモデルは曇天時の大気地表面系おける放射エネルギーの空間的・角度的分布を詳細に計算することができる。このような放射モデルは, 雲解像モデルを用いたシミュレーションにおいて放射加熱率の三次元分布を現実的に再現するのに特に重要である。またリモートセンシングデータを用いて広い領域の大気や陸面の観測をする場合には，雲やエーロゾル，微量気体，陸面などのパラメータを衛星観測で得られる分光放射輝度に結びつける必要があるが, そのような目的にも利用できる。

放射伝達の計算にフォワード型モンテカルロ法を用いており，多数のモデル光子を放射源から射出し，大気中の散乱および地表面での反射を乱数を用いて再現し，モデル光子が吸収または系の外に出るまでその軌跡を追跡する。ロシアンルーレット法などいつくかの標準的な分散減少法の他，Iwabuchi (2006) のトランケーション近似，衝突強制法，最大消散係数法，数値拡散など，このレポートの前章までで述べた多くのアルゴリズムを組み込んでいる。このモデルは初期には雲の三次元放射効果を調査する目的で開発され, 特に境界層雲の物理特性の衛星リモートセンシングの問題に関して成果をあげてきた (Iwabuchi and Hayasaka, 2002, 2003)。現在は雲解像モデルや LES (large eddy simulation) モデルとの結合を目指して開発・改良が続けられている。

大気は三次元のデカルト座標系で扱っており，雲，エーロゾル，ガス（吸収・散乱）などのパラメータの三次元分布を考慮している。エーロゾルは Hess et al. (1998)などを参考にしていくつかの典型的なモデルを設定できる。地表面は二次元の直交座標系で扱い，その双方向反射特性の二次元分布を考慮している。水面や陸面の半経験的な双方向反射モデルが組み込まれている。BRDF モデルとしては，ランバート反射，DMS モデル，RPV モデル，LSRT モデルが組み込まれている。現状では地表面は平らとしているが，水面などの鏡面反射の場合はマイクロスケールの粗度を考慮している。太陽放射の他, 赤外・マイクロ波の熱放射も扱うことができ, 波長の適用範囲はおよそ 0.2–2000 μm である。放射源としてはレーザービームなどの人口光源を扱うこともできる。

計算できる放射量としては, 放射照度 (領域平均または角度平均; 水平面または球面), 加熱率，放射輝度（領域平均または角度平均），平均光路長などである。放射照度については直達光とトータル照度（直達 + 拡散）について計算される。フォワード型の MC モデルであるので, 一回のシミュレーションによって放射照度と加熱率の三次元的な分布が得られる。放射輝度については任意の位置，任意の方向について計算可能である。一回のシミュレーションによって局所的な放射輝度を様々な角度について計算できる

ので例えば図 5.2.4 のような実写に近いコンピュータグラフィックスの作成などにも応用できる。またライダーのシグナルのシミュレーションが可能である。

三次元放射伝達の効果を調べるために三つの解法モードが用意されている。一つは完全に三次元の放射伝達を計算するモード (F3D) である。もう一つは大気カラムそれぞれについて一次元の放射伝達を計算するモード (Independent Column Approximation, ICA, Cahalan et al., 1994b) であり，これは現在の気候・気象モデルや大気・地表面のリモートセンシングにおいて用いられている計算法と同様のものである。さらにもう一つは低次の散乱を三次元で計算し，高次の散乱を一次元で計算するモード (P3D) である。

モデルのコードは Fortran 77 で書かれており，UNIX や Linux を OS とする様々な計算機上で動作が確認されている。オプションとして MPI で並列化されており，大規模な並列計算機上で非常に効率的に計算が可能である。モデルコードはオープンソースとなっており, 付随するソフトウェアおよびデモデータなどと共にパッケージ化され広く一般に公開されている（http://www.geocities.co.jp/null2unity/mcarats/）。

このモデルは I3RC (Cahalan et al., 2005)や Wagner et al. (2006), Ishida (2006) など複数の相互比較プロジェクトに参加しており，モデルの検証が行われており，現在も進行中である。

図 5.2.2 にフローチャートを示す。Maximum cross section 法を使っているため衝突は数学的な衝突と物理的な衝突に分類され, 物理的な衝突の場合にのみモデル光子を移動させる。モデル光子の追跡が終わるのは吸収によってウェイトがゼロになった場合か大気の上から脱出した場合である。放射照度と加熱率は 3.8 節で述べた方法 I (透過率のランダムサンプリング) を用いて計算している。放射輝度や局所的な放射照度は 3.9 節で述べた local estimation method を用いて衝突の度にサンプリングしている。

図 5.2.3 にモデルの格子系を示す。大気は水平方向に均質な層と不均質な層に分類される。これは雲などを含む層だけを三次元で扱い，それ以外の比較的光学的に薄い部分を鉛直一次元で扱うことによって計算負荷を減らすためである。各セル内では消散係数, 一次散乱アルベド，位相関数などの光学特性は一定である。水平境界条件は周期的としている。計算される放射量は層の境界において求めている。モデル光子の追跡アルゴリズムは空間分割法を用いており, モデル光子は常にボクセルを次々に移動しながら追跡される。

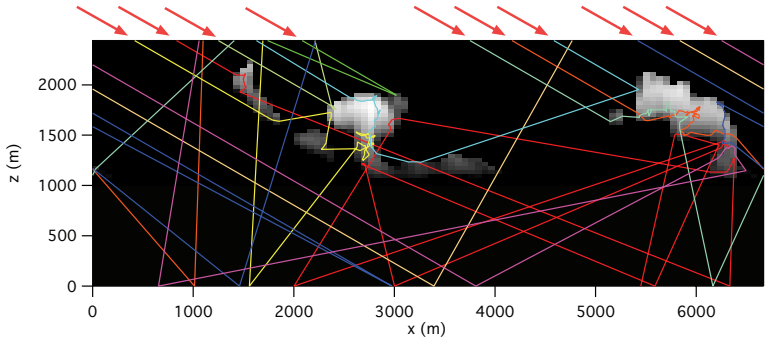


図 5.2.1　MC シミュレーションにおけるモデル光子の軌跡の例

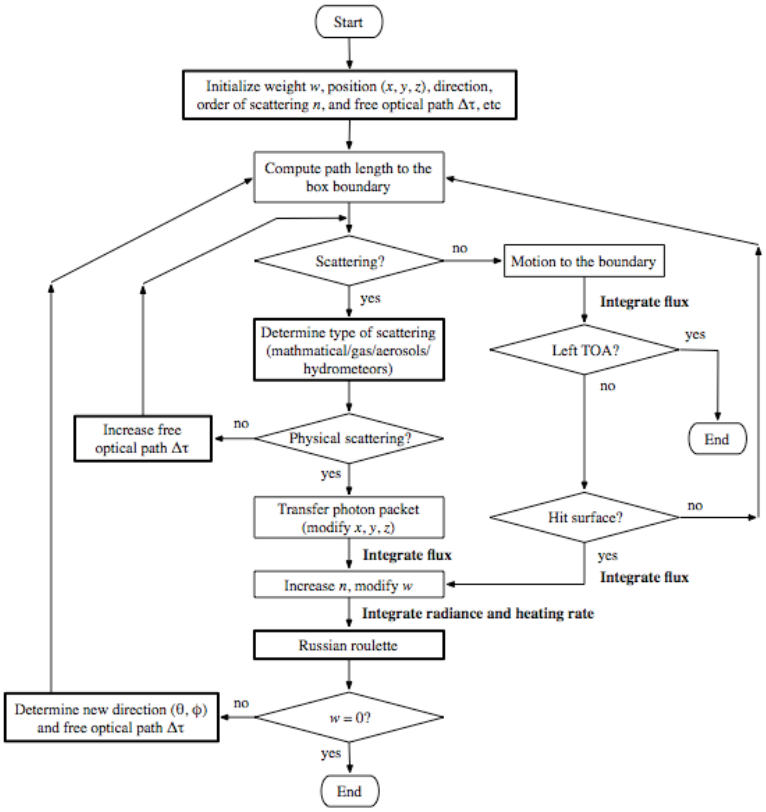


図 5.2.2　モデル MCARaTS のフローチャート。一つのモデル光子についてのアルゴリズムの流れを示している。

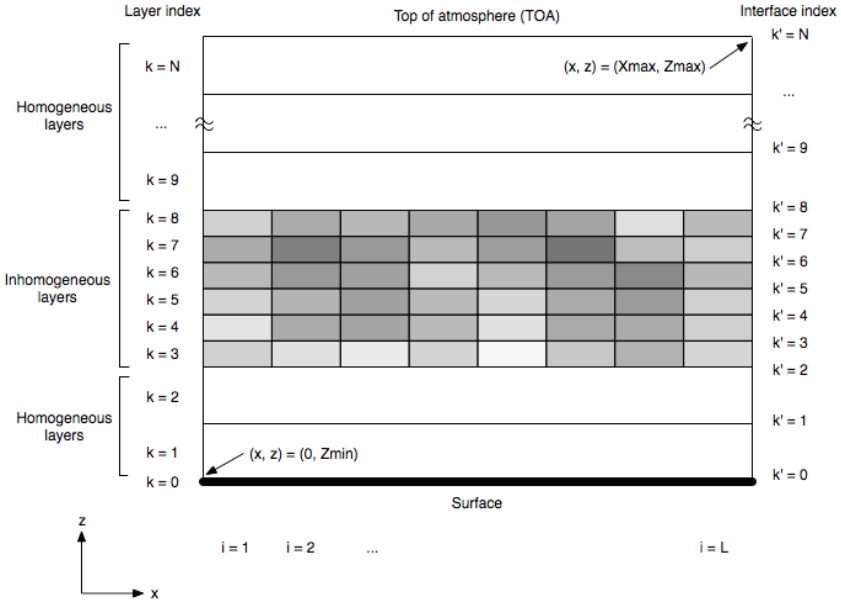


図 5.2.3 モデル MCARaTS の格子系

5.2.2 MCARaTS を用いた計算例

以下に計算例を示す。図 5.2.4–5 は Large Eddy Simulation (LES) によって再現された三次元の雲水量分布を入力として，モデル MCARaTS で地上と雲の上における放射輝度を様々な方向について計算したものである。地表面は風速約 7 m の海面を想定して計算した。海面における反射，雲の影，雲同士の多重反射が物理法則に忠実にしたがって再現されている。

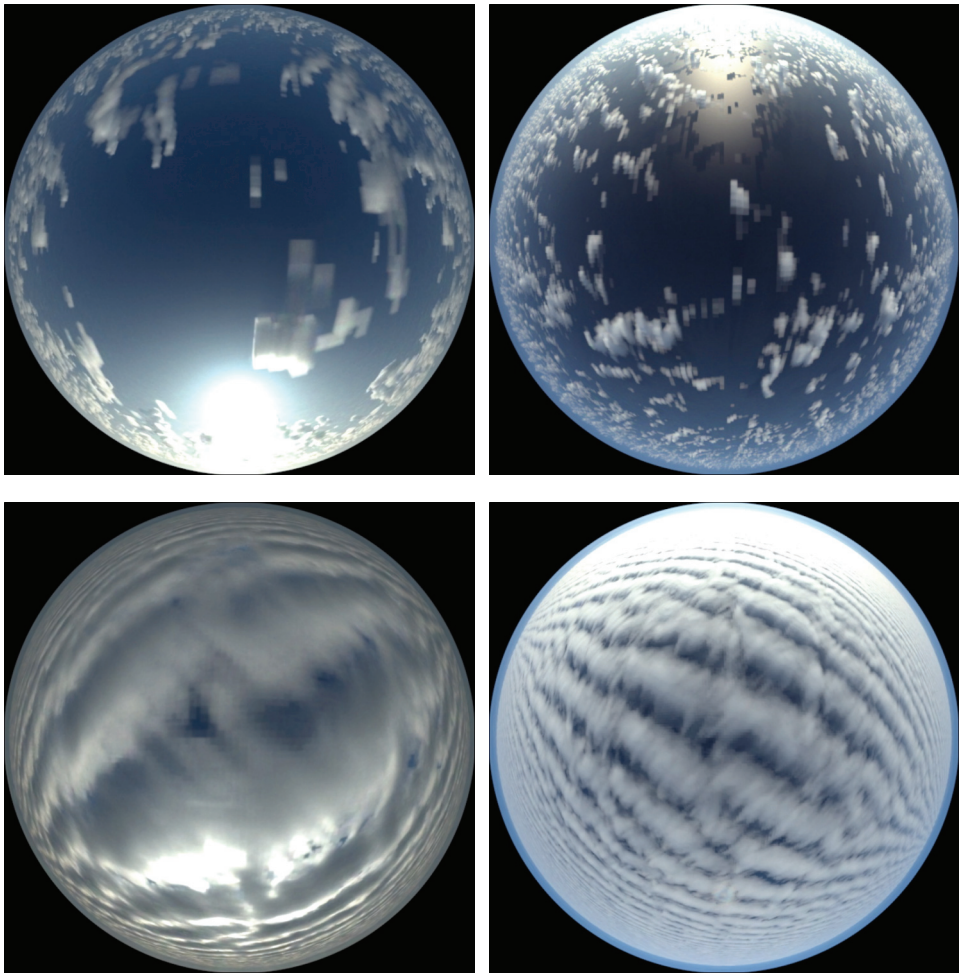


図 5.2.4　モデル MCARaTS を用いて作成したフォトリアリスティックなコンピュータグラフィックス：局所的な放射輝度を様々な角度について計算して半球上にプロットし，RGB の三色について合成したもの。雲水量の三次元的な分布は large eddy simulation によって再現されたデータを用いた。

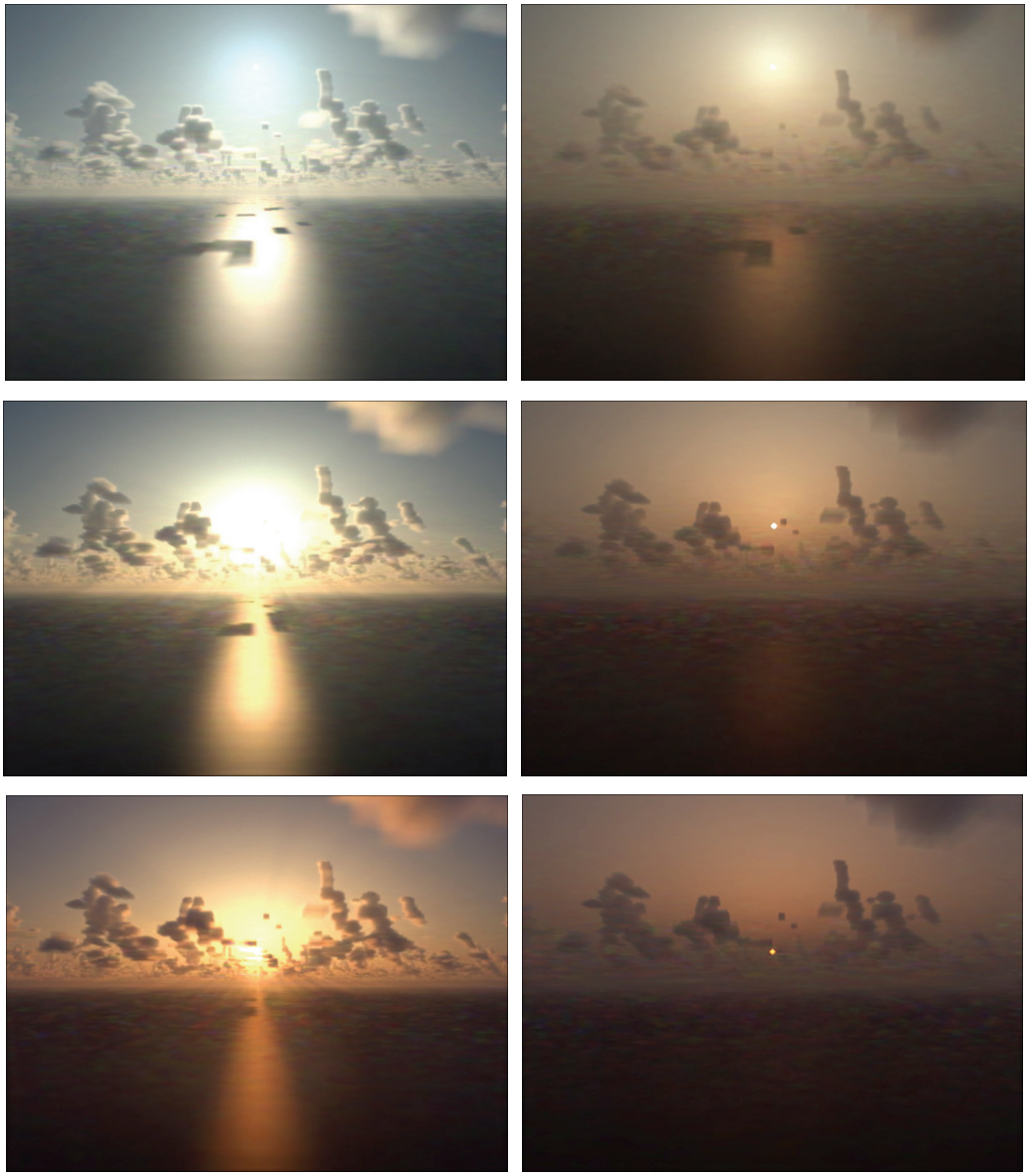


図 5.2.5　モデル MCARaTS を用いて作成したフォトリアリスティックなコンピュータグラフィックス：日の入り時の海上の空のシミュレーション。局所的な放射輝度を様々な角度について計算して RGB の三色について合成したもの。雲水量の三次元的な分布は large eddy simulation によって再現されたデータを用いた。左の三つは平均的なエーロゾルを与えた場合で，右の三つは汚染された大気を想定してエーロゾルを与えた場合。

図 5.2.6 は二つの積雲が並んでいる場合の放射照度と放射輝度の水平-鉛直断面図である。フォワード型の MC 法を用いているため，一回のシミュレーションで様々な場所の放射量が一度に求められる。

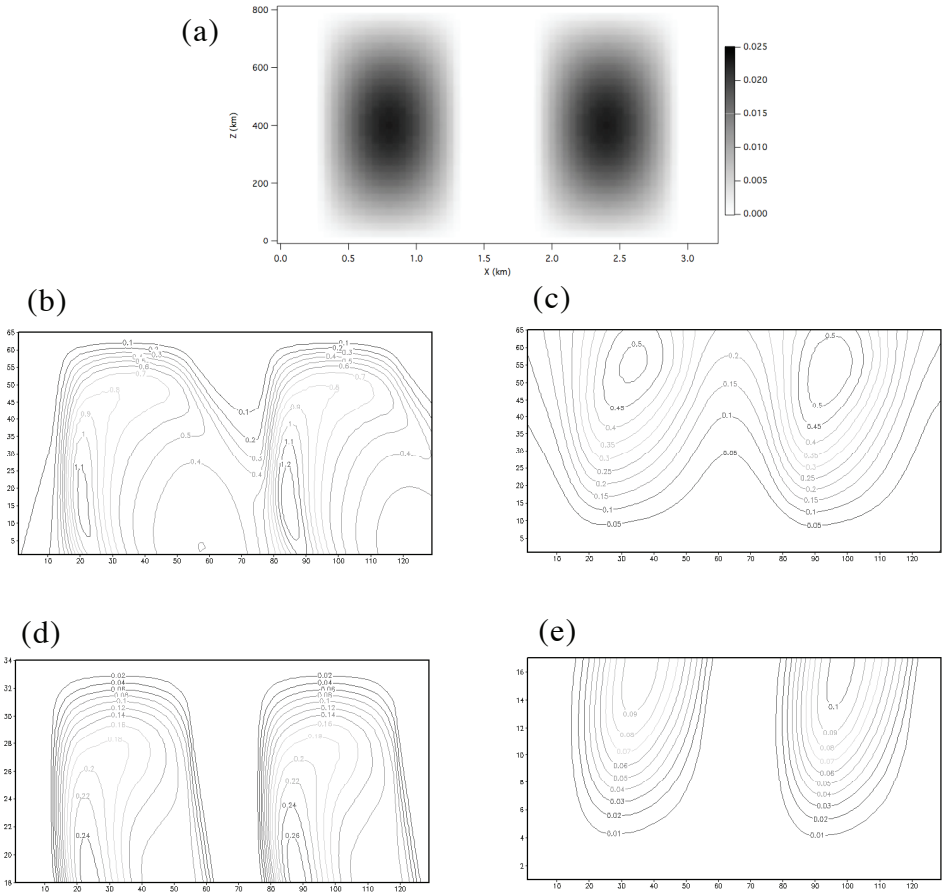


図 5.2.6 二つの積雲が並んでいる場合の波長 500 nm の計算例（x-z 断面図）：(a) 消散係数; (b) 下向き放射照度; (c) 上向き放射照度; (d) $\mu_1 = -0.95$, $\phi_1 = 0°$の下向き放射輝度; (e) $\mu_1 = 0.95$, $\phi_1 = 0°$の上向き放射輝度。太陽天頂角は 53 度で，左上の方から太陽直達光が射している。

図 5.2.7 は衛星観測放射輝度のシミュレーション結果である。また図 5.2.8 は多重散乱ライダーのシグナルを再現した結果である。このように放射モデルは雲などの物理量を遠隔測定するためのツールとしても利用される。

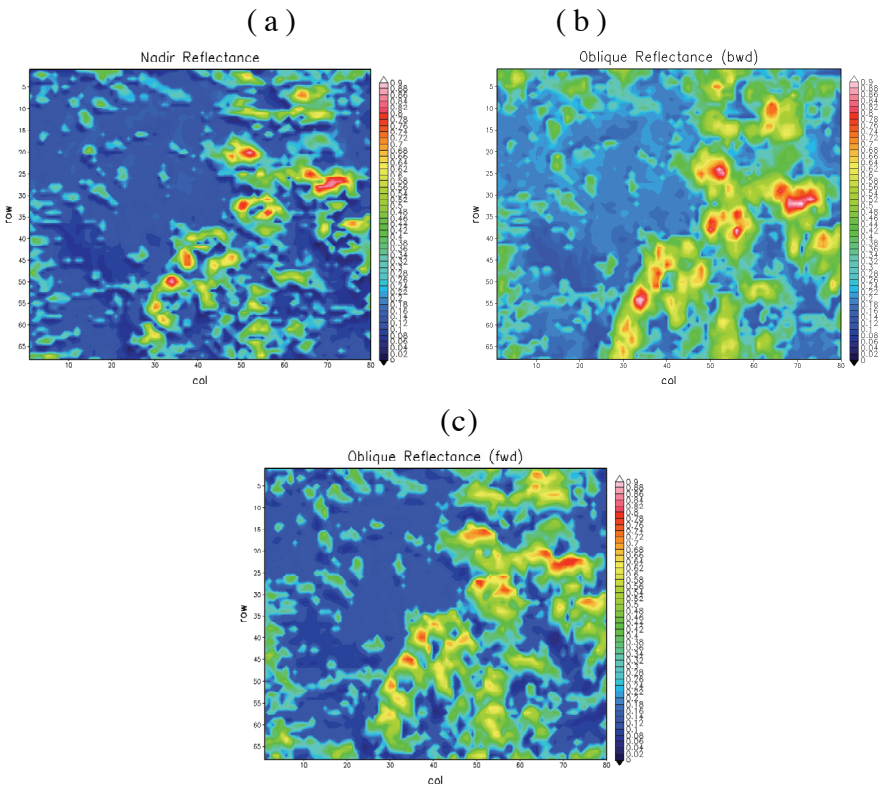


図 5.2.7　衛星観測放射輝度のシミュレーション結果：(a) 真下を見ている場合の BRF; (b) 斜め前方を見ている場合（後方散乱の位置関係）の BRF; (c) 斜め後方を見ている場合（前方散乱の位置関係）の BRF。これらは I3RC phase III の比較計算のケース 6 である。

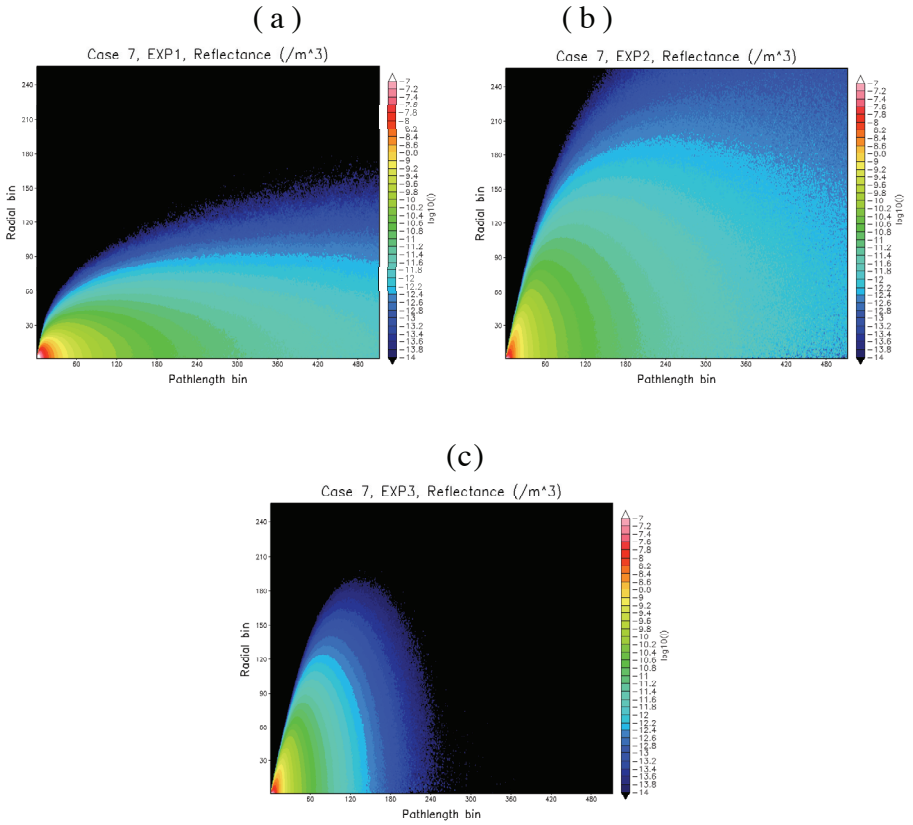


図 5.2.8　多重散乱ライダーのシグナルのシミュレーション結果：レーザービームが雲層に垂直に照射され，雲層で多重散乱を起こし，受光器の位置で検知されるべき放射照度について，雲層中での光子の飛行距離（横軸）と照射方向と受光方向の間の角度（縦軸）について分解して二次元分布としてプロットした図。 (a) 無限に厚い雲層で等方散乱の場合; (b) 無限に厚い雲層で Heyney-Greenstein 位相関数の散乱の場合; (c) 厚さ 300 m の雲層で Mie 散乱の位相関数の場合。これらは I3RC phase III の比較計算のケース 7 である。

5.3 植生放射伝達モデルの紹介

植生キャノピーの放射伝達モデルは，森林や草地などの光環境を把握する上で重要なツールである。光環境は植物の光合成活動にとって最も基本的な環境パラメータであることから，植物の光環境（吸収光合成有効放射量や森林の林床への入射照度など）の空間分布情報が放射伝達計算によって得られれば，3.12 節で説明した計算方法を用いて，植物群落の光合成量を計算することも可能となる。また，森林・草地等の樹冠上端における分光反射率の計算は，リモートセンシングによって観測される植生キャノピーの分光反射率と森林構造の関係を解析する際に役に立つ。

ここでは，2–4 章で解説したモンテカルロ計算手法を応用した植生キャノピーの 3 次元放射伝達モデルの構築手順を示し，モデルによる森林光環境の計算結果について幾つか紹介する。

5.3.1 植生キャノピーの三次元放射伝達モデル

a. シミュレーション景観

まず，植生放射伝達計算を行うためには対象となる景観シーンを作成する必要がある。図 5.3.1 はシミュレーションを行う森林景観及び個々の樹木や林床について示している。2.3 節で説明したように森林景観の定義方法には様々な方法が考えられるが，ここでは樹木の樹冠や幹を幾何形状で近似する（2.3 節の図 2.3.4 中央に対応）。

図 5.3.1(a)に示すように樹木の樹冠は回転楕円体で近似する。この楕円体の内部の領域には葉が均一に分布しているものとする（つまり葉面積密度が領域内で一定）。そして，樹冠部の内部に長軸・短軸共に 1/2 の大きさの回転楕円体を定義し，この中には枝が均一に分布しているものとする。幹は円柱で定義する。幹オブジェクトの内部には光は進入しないものとし，表面で散乱されるものとする。林床の植生は平行平面層を仮定し（2.3 節の図 2.3.4 左），その下に土壌が存在するものとする。

このような樹木を 30m x 30m の領域内に配置して森林景観を作成する。図 5.3.1(b)と(c)は，実際に作成した森林景観である。この場合，30m x 30m の空間に計 100 本の樹木を定義し，個々の樹木の位置は乱数を用いて決定している。また，ここでは樹木の樹高，樹冠の高さ，樹冠半径はそれぞれ，15.0m±7.5m，5.0m±1.2m，1.5m±0.3m として決定した。

森林キャノピーの放射伝達計算では，このようにして定義した森林キャノピーの上端から入射したモデル光子をレイトレースしながら，散乱・吸収といったイベントを発生させて必要な放射物理量をサンプリングすることになる。

b. 森林景観を構成する各要素の光学特性の定義

定義された森林景観でシミュレーションを行うためには，森林景観を構成する各要素の光学的な性質を定義する必要がある。定義が必要なパラメータとしては，2.3 節で説明した各要素の反射率や透過率，樹冠の葉面積密度，林床植生の葉面積指数，樹冠及び林床における葉面の傾き分布関数である。

このような森林景観を考えた場合，各パラメータをあらかじめ定義する必要がある。2.3 節でも説明したようにこれらの情報は単葉の光学モデルで計算することも可能であるし，分光測定データを用いることも可能である。ここでは，一例として以下の表 5.3.1，表 5.3.2 の値を用いて計算する。

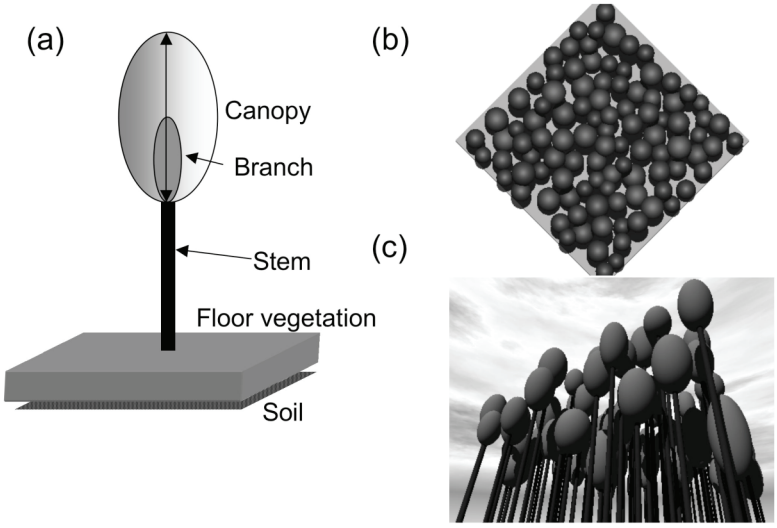


図 5.3.1 シミュレーションを実行する植生キャノピーの景観 (a) 樹木のモデル化 (b) モデル化した森林景観（上から）(c)モデル化した森林景観（側面から

表 5.3.1 森林の樹冠部と林床部の光学特性

	450nm	550nm	650nm	800nm	PAR
Canopy leaf reflectance	0.038	0.110	0.046	0.502	0.065
Canopy leaf transmittance	0.017	0.038	0.021	0.190	0.025
Floor leaf reflectance	0.050	0.186	0.075	0.420	0.100
Floor leaf transmittance	0.136	0.272	0.131	0.560	0.180
Stem	0.142	0.175	0.247	0.428	0.190
Soil	0.085	0.115	0.149	0.268	0.120

表 5.3.2 その他のパラメータ

Solar zenith angle	40°
Canopy leaf area density	0.5, 2.0
Canopy branch area density	0.5
Floor leaf area index	0.5

c. 森林景観におけるモンテカルロ計算

図 5.3.2 に森林キャノピーにおける放射伝達のフローチャートを示した。このシミュレーションでは，樹冠上端から w の重みを持つモデル光子を入射させ，森林景観のシーンの中でモデル光子の軌跡を追跡する。このときに樹冠オブジェクト内部，幹，林床での散乱イベントを発生させ，散乱イベント後は，モデル光子の重み w に各散乱要素の単一散乱アルベドωを乗じて減少させる（3.5 節参照）。散乱方向は，LUT 法で乱数を用いて決定する（3.5 節参照）。モデル光子のレイトレースは，モデル光子が森林景観から射出されるか，ロシアンルーレット法によって重みが 0 となった場合に終了し，次のモデル光子の追跡を開始する。

ロシアンルーレット法を実行する閾値εについては，明確な基準はない。しかし，閾値εをあまり大きくすると計算は速いがアルゴリズムの精度が悪くなり，逆に小さすぎると計算効率を向上させることができない。植生キャノピーの葉面の反射率・透過率は 2.3 節に示したように，可視域では極端に低く近赤外域で高い値を取る。従って現実的には閾値εは経験的に（試行錯誤的に）決定する必要がある。ここでは閾値εの一例として樹冠の葉面の単一散乱アルベドωを用いた以下の関数を用いる。

$$\varepsilon = 0.1\omega^2 \tag{5.3.1}$$

この式を用いると，可視域の様にω~0.1 の時に 3 回程度の散乱でロシアンルーレットが実行されることになる。また，近赤外域のようにω~0.9 の時に，樹冠の葉面のみで散乱を繰り返す場合には 20 回以上の散乱でようやくロシアンルーレットが実行されることになるが，実際には葉面より単一散乱アルベドの小さい幹や土壌での散乱も存在するため，5–10 回程度の散乱でロシアンルーレットが実行されることになる。

太陽の全波長や光合成有効放射成分の積分計算を行う場合には，3.11 節で説明した方法で，波長毎にサンプリングを行って積算値を求める。

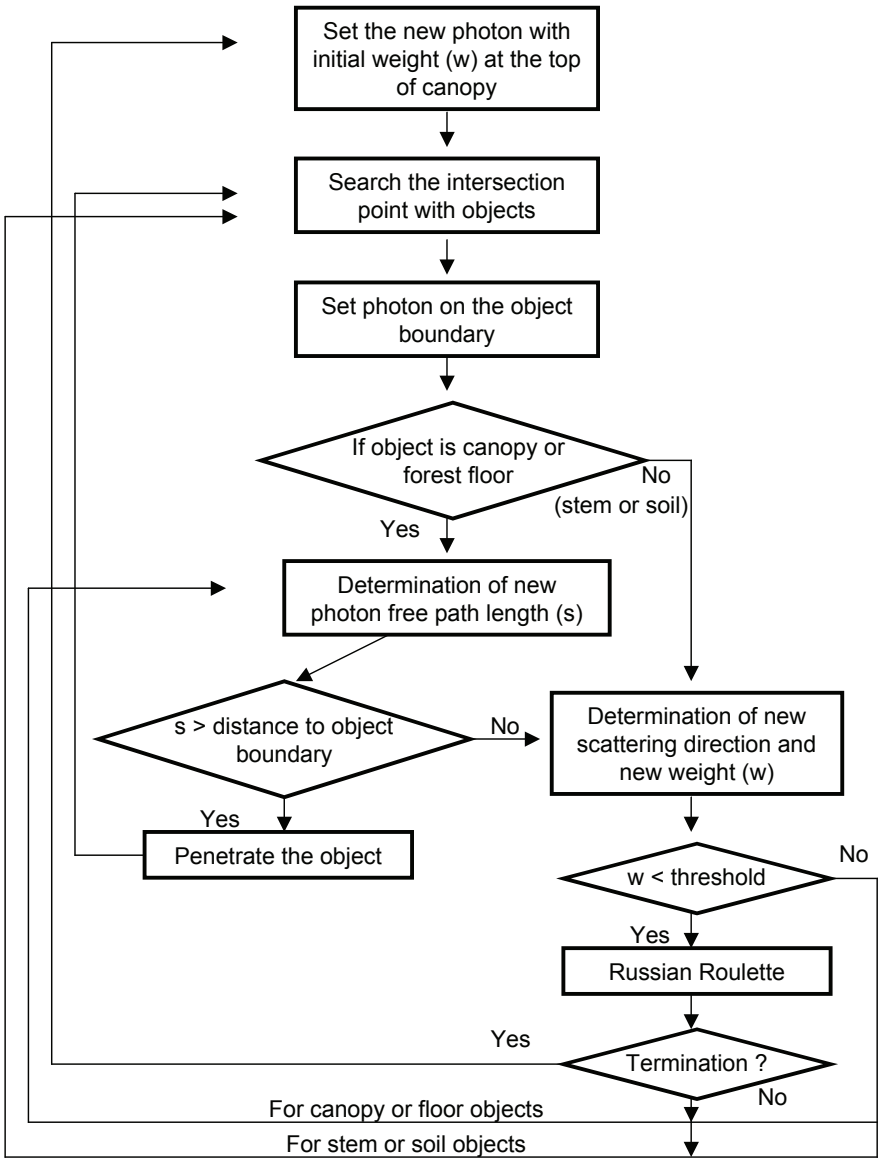


図 5.2.2 植生放射伝達モデルのフローチャート

d. 放射量のサンプリング

森林景観内でモデル光子のレイトレースを行いながら，必要な放射量をサンプリングする。森林のリモートセンシングや森林における炭素収支研究の観点から，重要度の高い放射物理量として以下の５つが挙げられる。

1. 森林上端における２方向性反射係数(BRF)
2. 林床の下向き照度

3. ボクセル内のトータルの吸収光合成有効放射 APAR [$\mu mols^{-1}m^{-2}m^{-3}$]or[$Wm^{-2}m^{-3}$]
4. ボクセル内の散乱成分の APAR [$\mu mols^{-1}m^{-2}m^{-3}$]or[$Wm^{-2}m^{-3}$]
5. ボクセル内で吸収された直達モデル光子の数

ここでは， BRF のサンプリング方法として局所推定法 (Local Estimation Method, LEM) を採用する。林床における下向き照度は，林床植生に対する光環境を計算する上で重要なパラメータである。ここでは，最も手軽なサンプリング法は，林床に入射したモデル光子の重みをカウントする方法を用いる。

上記 3–5 のパラメータは 3.1.2 小節で説明した森林全体の光合成量を計算するために必要なパラメータである。3 及び 4 の各ボクセル内での吸収光合成有効放射 APAR は，大気放射伝達計算での加熱率に対応するパラメータである。各ボクセルで散乱イベントが発生した場合に，吸収されるエネルギーの割合 $w_i(1 - \omega)$ をカウントする方法でサンプリング。

しかし，落葉樹林の春先の展葉時期のように，樹木の樹冠部分の葉面積密度が極めて小さい場合には樹冠における散乱イベントが少なく，精度良く APAR のサンプリングが行えない場合がある。この場合には，4.2 節の強制衝突法で述べられている，“スケーリング変換を用いる方法”を用いると計算精度を向上させることができ，且つ計算速度も比較的高速である。

5.3.2 計算例

以下にモデルによる計算結果の一例を示す。図 5.2.3 は青，緑，赤，近赤外の波長領域における図 5.3.1 の植生キャノピーの二方向性反射係数(Bidirectional reflectance factor, BRF)である。図の x 軸は Principal Plane 上での観測角度を示しており，角度がマイナスの場合，太陽光の入射方向（後方散乱）に等しいことを示している。すべての波長で，BRF は後方散乱が大きく，前方散乱方向で観測角が大きくなるにつれ小さくなっている。太陽入射方向では，BRF のピークが見られる。これは Hotspot もしくは opposition effect と呼ばれるものであり，観測視野から散乱体の影がなくなることによって生じる効果である。

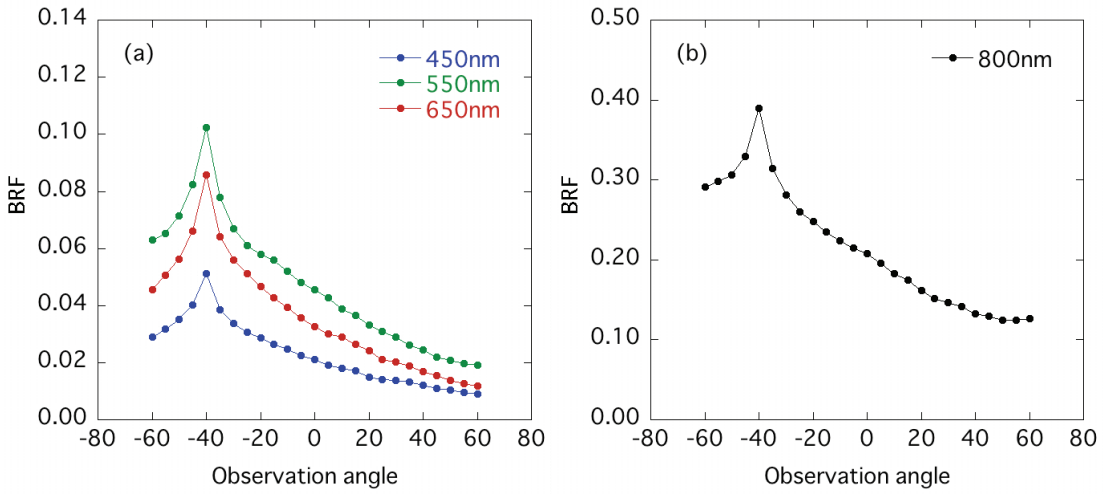


図 5.2.3 植生キャノピー上端における２方向性反射係数（Principal Plane）(a) 450nm, 550nm, 650nm (b) 800nm

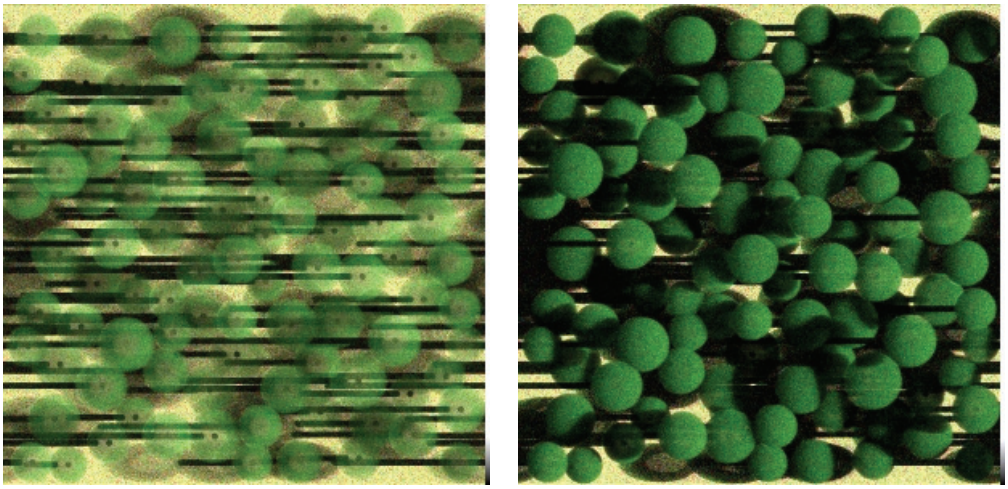
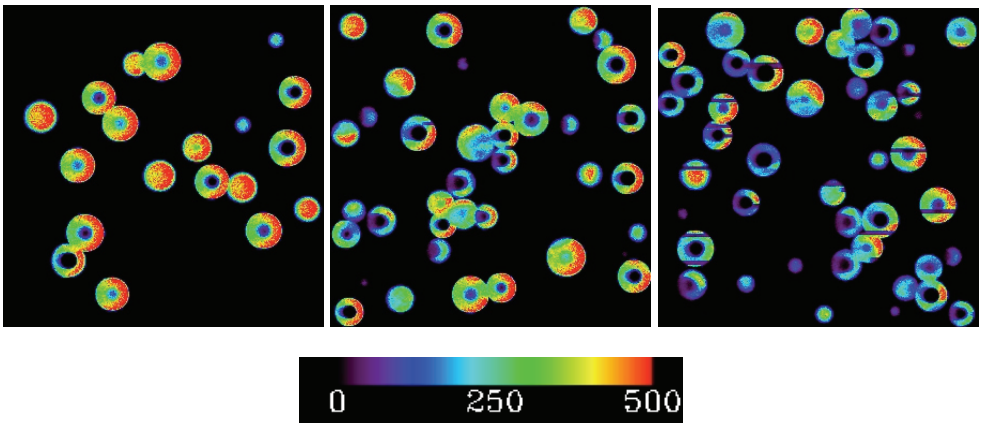


図 5.2.4 直下視における森林景観のシミュレーション 左:葉面積密度 0.5 右:葉面積密度 2.0

図 5.2.4 は，図 5.2.1 の森林景観におけるキャノピー上端の直下視のシミュレーション画像を RGB 合成したものである。左の画像は，樹木の樹冠部の葉面積密度が 0.5 と疎なタイプの森林を計算した結果であり，右の画像は葉面積密度を 2.0 として計算した結果である。樹冠の葉面積が薄い場合には，樹冠を透過して林床の状態が見えている。また，この画像の場合，太陽光は画像の右方向から入射しており，左右に伸びる黒い線は樹木の幹の影である。

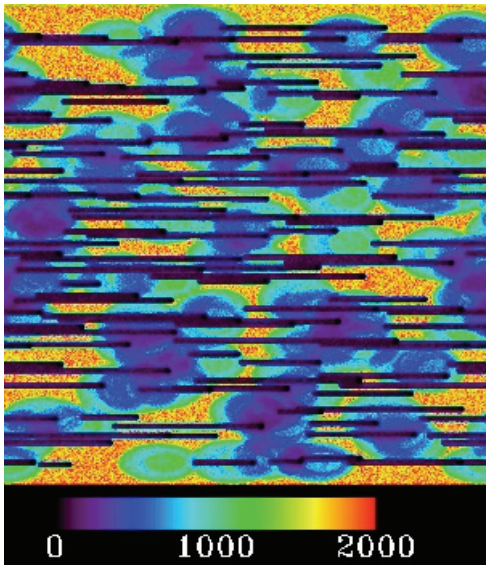
図 5.2.5 は，森林の樹冠における吸収光合成有効放射量(APAR)の分布の計算結果を 3

高度で示したものである。高度が下がるにつれて APAR の絶対量は少なくなっている様子が分かる。また，図 5.2.5 右のように高度の低い場合には，APAR 分布に幹の影響による棒状の影が見られる。図 5.2.6 は，森林の林床における下向き入射照度の空間分布である。葉面積密度が 0.5 と光学的に薄い樹冠を持つ森林であっても日陰の照度は日向の 20%以下である。



(μmol m^{-2} s^{-1})

図 5.2.5 森林キャノピー内（葉面積密度 0.5）における吸収光合成有効放射分布, 左：19-20m 平均, 中：14-15m 平均, 右：9-10m 平均



(μmol m^{-2} s^{-1})

図 5.2.6 林床における下向き照度(光合成有効放射，葉面積指数 0.5)

第 6 章　結論

本稿ではモンテカルロ (MC) 法を用いた三次元放射伝達モデルについて, その基礎となる物理理論を簡単に解説し, 具体的な計算アルゴリズムについて詳細に述べた。近年, 大型計算機の処理能力は 10 年で 400 倍のスピードで飛躍的に伸びている。この傾向は少なくとも近い将来は継続すると予想される。それに伴い, 科学計算で用いられるモデルも次第に複雑化し, よりリアリズムを向上させることができるであろう。放射モデルに関しても目的に応じてより精密で現実的な扱いが可能となると予想される。本論で述べたように, MC 法を用いると曇天大気や植生キャノピーの三次元放射伝達を効率的に計算することができる。複雑に混合した媒体や双方向反射率分布関数を考慮した精密な扱いが可能であり, また散乱次数別に放射量を求めたり, 任意の座標系で任意形状の複雑なオブジェクトを扱うことができるという特長がある。さらに波長積分された放射量を計算する場合は非常に優れた方法である。本稿では基本的に曇天大気および植生キャノピー中の放射過程のモデル化について述べたが, ここで述べたアルゴリズムはそれに限定されず, たとえば都市キャノピーの放射伝達や, 山岳地形など凹凸のある地表面上の放射伝達, あるいは宇宙物理や医療計測, 機械工学の分野でも応用できるものである。様々な系での放射伝達のモデル化など何か新しい問題に直面したときに, 読者自身がモデルを構築するための参考資料として本稿が役立てば著者らにとって幸いである。

モンテカルロ法を用いた大気放射伝達に関してさらに発展的な計算方法については Marchuk et al. (1980) を参照されたい。Marchuk et al. の著書は 25 年以上たった今現在でもベストなモンテカルロ法放射伝達モデルの教科書である。植生キャノピーの放射伝達に関しても, 近年は大気放射伝達と類似なモデル化が試みられており, Marchuk et al. (1980)の手法は適用可能な場合が多い。

謝辞

本稿 5.2 節で用いた境界層雲の Large Eddy Simulation のデータは海洋研究開発機構 地球環境フロンティア研究センターの坪木和久博士・野田暁博士の両氏より提供して頂きました。心よりお礼申し上げます。

Appendix

A1 解析的な粒径分布

雲粒やエーロゾルの粒径分布は解析的な関数で近似表現されることが多い。以下に代表的な分布関数について述べ, その特性量と M, V, N との関係などについてまとめる。記号などの表記は 2.1 節と同様である。

A1.1 Power-law distribution

氷晶などの粒径分布は power-law の組み合わせで表現されることがある (OPAC, Hess et al., 1998; Heymsfield and Platte, 1984)。

$$n(r) = NMf \times \begin{cases} 0 & \text{for } r < r_0 \text{ or } r_2 < r \\ a_1 r^{b_1} & \text{for } r_0 < r < r_1 \\ a_2 r^{b_2} & \text{for } r_1 < r < r_2 \end{cases} \tag{A1.1}$$

このように N と M 以外のパラメータが 8 個もあって複雑である。

A1.2 Gamma distribution

ガンマ分布は雲粒の粒径分布として用いられることが多い。

$$n(r) = N \frac{r^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{r}{\beta}\right) \tag{A1.2}$$

$\alpha > 0$ はスケールパラメータである。モード半径 r_{mod} は,

$$r_{mod} = (\alpha - 1)\beta,\ \alpha \geq 1 \tag{A1.3}$$

である。p 次のモーメントは次式で与えられる。

$$\frac{\beta^p \Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha)} \tag{A1.4}$$

これを使うと様々な平均半径および（幾何学的）分散 v_{geo} は次式で与えられる。

$$r_{geo} = \beta\alpha \tag{A1.5a}$$

$$r_{sec}^2 = \beta^2\alpha(\alpha+1) \tag{A1.5b}$$

$$r_{vol}^3 = \beta^3\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \tag{A1.5c}$$

$$v_{geo} = \beta^2\alpha \tag{A1.5d}$$

よって平均で規格化された標準偏差は,

$$\tilde{\sigma} \equiv \frac{\sqrt{v_{geo}}}{r_{geo}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tag{A1.6}$$

となる。また有効半径と有効分散は,

$$r_{eff} = (\alpha+2)\beta = (\alpha+2)\frac{r_{mod}}{\alpha-1} = \frac{r_{geo}}{1-2v_{eff}} \tag{A1.7a}$$

$$v_{eff} = \frac{1}{\alpha+2} \tag{A1.7b}$$

となる。(A1.5c) と (A1.7a) より (2.2.23) のκは,

$$\kappa = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+2)^2} \tag{A1.8}$$

となる。また，βを M と N で表すと，以下の式になる。

$$\beta = \left[\frac{3}{4\pi(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha} \cdot \frac{M}{\rho N}\right]^{1/3} \tag{A1.9}$$

これを(A1.7a) に代入すれば M と N（または V と N）から有効半径を求めることができる。

有効半径と体積平均半径からパラメータα, βを求めるには,

$$\beta = \frac{r_{eff}}{4}\left[3 - \sqrt{1 + 8\left(r_{vol}/r_{eff}\right)^3}\right] \tag{A1.10a}$$

$$\alpha = \frac{r_{eff}}{\beta} - 2 \tag{A1.10b}$$

を使えば良い。

ガンマ分布をβの替わりに r_{geo} または r_{mod}（ただしこのときは$\alpha > 1$ に限定される）で表すと以下の式になる。

$$n(r) = N\left(\frac{\alpha}{r_{\mathrm{geo}}}\right)^{\alpha} \frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha}{r_{\mathrm{geo}}} r\right) \tag{A1.11a}$$

$$n(r) = N\left(\frac{\alpha-1}{r_{mod}}\right)^{\alpha} \frac{r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha-1}{r_{mod}} r\right) \tag{A1.11b}$$

A1.3 Modified Gamma distribution

修正ガンマ分布（一般ガンマ分布とも呼ばれる）もまた雲粒の粒径分布として用いられることが多い。

$$n(r) = N \frac{r^{\alpha\gamma-1}}{\beta^{\alpha\gamma}\Gamma(\alpha)} \exp\left[-\left(\frac{r}{\beta}\right)^{\gamma}\right] \tag{A1.12}$$

α, β, γがパラメータである。モード半径は

$$r_{mod} = \beta\left(\frac{\alpha\gamma - 1}{\gamma}\right)^{1/\gamma} \quad \text{for } \alpha > \frac{1}{\gamma} \tag{A1.13}$$

である。p 次のモーメントは次式で与えられる。

$$\frac{\beta^p \Gamma\left(\alpha + \frac{p}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)} \tag{A1.14}$$

前小節同様に，これを使って様々な平均半径や有効半径などを導出できる。

$$r_{geo} = \beta\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{\gamma}\right)\Big/\Gamma(\alpha) \tag{A1.15a}$$

$$r_{sec}^2 = \beta^2\Gamma\left(\alpha + \frac{2}{\gamma}\right)\Big/\Gamma(\alpha) \tag{A1.15b}$$

$$r_{vol}^3 = \beta^3\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{\gamma}\right)\Big/\Gamma(\alpha) \tag{A1.15c}$$

$$r_{eff} = \beta\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{\gamma}\right)\Big/\Gamma\left(\alpha + \frac{2}{\gamma}\right) \tag{A1.15d}$$

βの変わりに r_{geo} または r_{mod} を使って (A1.12) を書き直すと（ただし後者の場合は$\alpha > 1/\gamma$に限定される），

$$n(r) = N\frac{X^\alpha}{r\Gamma(\alpha)}\exp(-X) \tag{A1.16a}$$

$$X = \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1/\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\frac{r}{r_{geo}}\right)^\gamma = \frac{\alpha\gamma - 1}{\gamma}\left(\frac{r}{r_{mod}}\right)^\gamma \tag{A1.16b}$$

となる。

A1.4 Lognormal distribution (Number density)

雲粒やエーロゾルの数密度粒径分布は対数正規分布が用いられることが多い（Nakajima and King, 1990; Hess et al., 1998）。

$$n(r) = N\frac{1}{\sqrt{2\pi}r\ln s}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln r - \ln r_{mod}}{\ln s}\right)^2\right] \tag{A1.17}$$

r_{mod} は対数スケールでのモード（dN/dln$r$ のモード）に対応する半径である。p 次のモーメントは，

$$(\ln r_{mod})^p \exp\left(\frac{1}{2}p^2\ln^2 s\right) \tag{A1.18}$$

である。これを使うと，以下が導かれる。

$$r_{geo} = r_{mod} \exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 s\right) \tag{A1.19a}$$

$$r_{sec} = r_{mod} \exp\left(\ln^2 s\right) \tag{A1.19b}$$

$$r_{vol} = r_{mod} \exp\left(\frac{3}{2}\ln^2 s\right) \tag{A1.19c}$$

$$v_{geo} = r_{mod}^2 \exp\left(\ln^2 s\right)\left[\exp\left(\ln^2 s\right) - 1\right] \tag{A1.19d}$$

$$r_{eff} = r_{mod} \exp\left(\frac{5}{2}\ln^2 s\right) \tag{A1.19e}$$

$$v_{eff} = \exp\left(\ln^2 s\right) - 1 \tag{A1.19f}$$

$$\kappa = \exp\left(-3\ln^2 s\right) \tag{A1.19g}$$

となる。(A1.19g) を(2.2.25) に代入すれば M と N（または V と N）から有効半径とモード半径を求めることができる。

$$r_{eff} = \left[\frac{3M}{4\pi N\rho}\right]^{1/3} \exp\left(\ln^2 s\right) \tag{A1.20a}$$

$$r_{mod} = \left[\frac{3M}{4\pi N\rho}\right]^{1/3} \exp\left(-\frac{3}{2}\ln^2 s\right) \tag{A1.20b}$$

また，r_{mod}, s を r_{vol} と r_{eff} で表すと，以下の式になる。

$$r_{mod} = r_{vol}\left(\frac{r_{vol}}{r_{eff}}\right)^{3/2} = r_{vol}\sqrt{\kappa} \tag{A1.21a}$$

$$\ln^2 s = \ln\left(\frac{r_{eff}}{r_{vol}}\right) = -\frac{1}{3}\ln\kappa \tag{A1.21b}$$

A1.5 Lognormal distribution (Volume density)

体積密度の粒径分布が対数正規分布と仮定する場合もある (Hayasaka et al., 1994; Higurashi and Nakajima, 1999)。

$$v(r) \equiv \frac{dV}{dr} = V\frac{1}{\sqrt{2\pi}r\ln s}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln r - \ln r_{mod}}{\ln s}\right)^2\right] \tag{A1.22}$$

この場合の数密度粒径分布は，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
n(r) &= \frac{dV}{dr} \times \frac{3}{4\pi r^3} \\
&= N \frac{r_{vol}^3}{\sqrt{2\pi} r^4 \ln s} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln r - \ln r_{mod}}{\ln s} \right)^2 \right]
\end{aligned}
\tag{A1.23}
$$

平均半径などは，以下の式で与えられる。

$$r_{geo} = r_{mod} \exp\left(-\frac{5}{2} \ln^2 s \right) \tag{A1.24a}$$

$$r_{sec} = r_{mod} \exp\left(-2 \ln^2 s \right) \tag{A1.24c}$$

$$r_{vol} = r_{mod} \exp\left(-\frac{3}{2} \ln^2 s \right) \tag{A1.24c}$$

$$r_{eff} = r_{mod} \exp\left(-\frac{1}{2} \ln^2 s \right) \tag{A1.24d}$$

$$\kappa = \exp\left(-3 \ln^2 s \right) \tag{A1.24e}$$

(A1.24e) を(2.2.25) に代入すれば M と N（または V と N）から有効半径とモード半径を求めることができる。

$$r_{eff} = \left[\frac{3M}{4\pi N \rho} \right]^{1/3} \exp\left(\ln^2 s \right) \tag{A1.25a}$$

$$r_{mod} = \left[\frac{3M}{4\pi N \rho} \right]^{1/3} \exp\left(\frac{1}{2} \ln^2 s \right) \tag{A1.25b}$$

また，r_{mod}, s を r_{vol} と r_{eff} で表すと，以下の式になる。

$$r_{mod} = r_{vol} \left(\frac{r_{eff}}{r_{vol}} \right)^{3/2} = \frac{r_{vol}}{\sqrt{\kappa}} \tag{A1.26a}$$

$$\ln^2 s = \ln\left(\frac{r_{eff}}{r_{vol}} \right) = -\frac{\ln \kappa}{3} \tag{A1.26b}$$

A2 混合媒体の光学特性

複数のエーロゾルまたは雲水，雲氷が混合している媒体を考える。今，それぞれの構成成分について散乱特性と物理特性が求められているとする。吸湿性のある成分につ

いては吸湿状態 (wet) の特性を考える。このとき混合媒体の光学特性は，各成分の絶対量（$N(i)$ or $V(i)$ or $q(i)$）が与えられていれば，以下の式で計算できる。

$$\overline{\beta}_e = \sum_i \sigma_e(i)N(i) = \sum_i Q_e(i)\pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 N(i) \tag{A2.1a}$$

$$\overline{\beta}_s = \sum_i \sigma_s(i)N(i) = \sum_i Q_s(i)\pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 N(i) \tag{A2.1a}$$

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{\beta}_s}{\overline{\beta}_e} \tag{A2.1c}$$

$$\overline{P}(\Theta) = \frac{\sum_i \sigma_s(i)N(i)P(i,\Theta)}{\sum_i \sigma_s(i)N(i)} = \frac{1}{\overline{\beta}_s}\sum_i Q_s(i)\pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 N(i)P(i,\Theta) \tag{A2.1d}$$

絶対量は未知で成分毎の混合比が与えられている場合も考えられる。数密度混合比をα_Nとすると，

$$\sum_i \alpha_N(i) = 1 \tag{A2.2a}$$

$$\alpha_N(i) = \frac{N(i)}{\overline{N}}, \tag{A2.2b}$$

である。ここで，混合媒体の全数密度を

$$\overline{N} = \sum_i N(i), \tag{A2.3}$$

と置いた。混合媒体の乾燥状態 (dry) または吸湿状態 (wet) の面積平均半径および体積平均半径，内部密度は次式で与えられる。

$$\overline{r}_{sec}^{dry/wet} = \left[\sum_i \left(r_{sec}^{dry/wet}(i)\right)^2 \alpha_N(i)\right]^{1/2} \tag{A2.4a}$$

$$\overline{r}_{vol}^{dry/wet} = \left[\sum_i \left(r_{vol}^{dry/wet}(i)\right)^3 \alpha_N(i)\right]^{1/3} \tag{A2.4b}$$

$$\overline{\rho}^{dry/wet} = \frac{\sum_i \left(r_{vol}^{dry/wet}(i)\right)^3 \rho^{dry/wet}(i)\alpha_N(i)}{\sum_i \left(r_{vol}^{dry/wet}(i)\right)^3 \alpha_N(i)} \tag{A2.4c}$$

吸湿状態の平均の光学特性は以下の式で計算できる。

$$\overline{Q}_e = \frac{\sum_i Q_e(i)\pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 \alpha_N(i)}{\sum_i \pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 \alpha_N(i)} \tag{A2.5a}$$

$$\overline{Q}_s = \frac{\sum_i Q_s(i)\pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 \alpha_N(i)}{\sum_i \pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 \alpha_N(i)} \tag{A2.5b}$$

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{Q}_s}{\overline{Q}_e} \tag{A2.5c}$$

$$\overline{P}(\Theta) = \frac{\sum_i Q_s(i)\pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 \alpha_N(i) P(i,\Theta)}{\sum_i Q_s(i)\pi\left(r_{sec}^{wet}(i)\right)^2 \alpha_N(i)} \tag{A2.5d}$$

これを使えば全数密度の絶対値が与えられたとき，消散係数などは以下の式で計算できる。

$$\overline{\beta}_e = \overline{N} \times \overline{Q}_e \left(\overline{r}_{sec}^{wet}\right)^2,\ \overline{\beta}_s = \overline{N} \times \overline{Q}_s \left(\overline{r}_{sec}^{wet}\right)^2 \tag{A2.6}$$

数密度混合比ではなく，乾燥状態 (dry) または吸湿状態 (wet) の体積密度混合比，質量密度混合比が与えられている場合も考えられる。その場合は各成分の体積平均半径と粒子の内部密度が既知であれば，数密度混合比に変換できる。様々な混合比について

$$\sum_i \alpha_V^{dry}(i) = \sum_i \alpha_M^{dry}(i) = \sum_i \alpha_V^{wet}(i) = \sum_i \alpha_M^{wet}(i) = 1 \tag{A2.7}$$

が成り立つ。数密度混合比との関係は，

$$\alpha_V^{dry/wet}(i) \propto \alpha_N(i) \times \left(r_{vol}^{dry/wet}(i)\right)^3 \tag{A2.8a}$$

$$\alpha_M^{dry/wet}(i) \propto \alpha_N(i) \times \left(r_{vol}^{dry/wet}(i)\right)^3 \rho^{dry/wet}(i) \tag{A2.8b}$$

であり，これと(A2.7)を使えば数密度混合比に変換できる。表 A1 は Hess et al. (1998) を参考にして計算した典型的なエーロゾルの特性である。

表 A1　典型的なエーロゾルの物理的・光学的特性。波長 0.55 μm，相対湿度 80%のときの値。g は非等方性因子である。

Aerosol type	r_{eff}	ρ	Q_{e}	ω	g
Continental clean	0.23	15.1	0.941	0.973	0.710
Continental average	0.21	14.9	0.893	0.930	0.706
Continental polluted	0.18	14.3	0.853	0.899	0.700
Urban	0.18	14.6	0.796	0.828	0.692
Desert	1.28	25.5	1.92	0.889	0.729
Maritime clean	1.07	12.2	1.94	0.997	0.768
Maritime polluted	0.69	12.2	1.49	0.976	0.753
Maritime tropical	1.13	12.2	2.02	0.998	0.770
Arctic	0.29	12.4	1.00	0.893	0.721
Antarctic	0.46	11.2	2.33	1.000	0.776
Mineral transported	2.37	26.0	2.34	0.820	0.782
Yellow dust	2.19	20.0	2.43	0.871	0.738
Stratosphere	0.44	11.0	2.33	1.000	0.776
Volcanic ash	0.44	10.0	2.50	0.930	0.707

A3　波長平均した光学特性

ある波長区間について放射伝達の計算をする場合，その波長区間について平均された一次散乱特性を考える必要がある。通常，放射源関数のスペクトル分布（太陽入射照度スペクトルまたは黒対放射のスペクトル）$S(\lambda)$ で重み付け平均した光学特性を用いることが多い。

$$\tilde{Q}_e = \frac{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} Q_e(\lambda)S(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} S(\lambda)d\lambda} \tag{A3.1a}$$

$$\tilde{Q}_s = \frac{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} Q_s(\lambda)S(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} S(\lambda)d\lambda} \tag{A3.1b}$$

$$\tilde{Q}_a = \frac{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} Q_a(\lambda)S(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} S(\lambda)d\lambda} \tag{A3.1c}$$

$$\tilde{P}(\Theta) = \frac{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} P(\Theta,\lambda)Q_s(\lambda)S(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} Q_s(\lambda)S(\lambda)d\lambda} \tag{A3.1d}$$

このような平均化をした場合, 厳密には消散効率因子は散乱効率因子と吸収効率因子の和にならない。

$$\tilde{Q}_e \neq \tilde{Q}_s + \tilde{Q}_a \tag{A3.2}$$

これが原因となって, 波長平均の一次散乱アルベドの定義には様々なものが考えられる。

$$\overline{\varpi}(0) = \frac{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \omega(\lambda) S(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} S(\lambda) d\lambda} \tag{A3.3a}$$

$$\overline{\varpi}(1) = \overline{Q}_s / \overline{Q}_e \tag{A3.3b}$$

$$\overline{\varpi}(2) = \left(\overline{Q}_e - \overline{Q}_a\right) / \overline{Q}_e \tag{A3.3c}$$

$$\overline{\varpi}(3) = \overline{Q}_s / \left(\overline{Q}_s + \overline{Q}_a\right) \tag{A3.3d}$$

$$\overline{\varpi}(4) = \frac{1}{2}\left(\overline{\varpi}(1) + \overline{\varpi}(2)\right) \tag{A3.3e}$$

他の定義もある (e.g., Fu, 1996; Nakajima et al., 2000)。これらの差が特に大きいのは，吸収の強さや放射源のスペクトルが波長によって激しく変化する波長区間である。どの定義を用いると波長平均した放射量を高精度で計算できるかという問題の答えは, 吸収の強さや波長区間によって異なる。

A4 エーロゾルの鉛直分布

エーロゾルの鉛直分布は指数分布で表現されることが多い。エーロゾルの組成と粒径分布，混合比，および（吸湿性のエーロゾルの場合は）相対湿度が高度によって変化しなければ，消散係数の鉛直分布は数密度の鉛直分布に比例する。相対湿度による吸湿成長を考慮すると比例はしない。

数密度の鉛直分布が指数分布であるとしよう。

$$N(z) = N(0)\exp(-sz),\ s = \frac{1}{Z_s} \tag{A4.1}$$

エーロゾルの存在する最小高度を $Z_{\min}$，最大高度を $Z_{\max}$ とすると，単位断面積の大気柱あたりに含まれるエーロゾル数 (vertically-integrated number concentration) は,

$$
\begin{aligned}
N_{col} &= \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} N(z)dz \\
&= N(0)\frac{\left[\exp\left(-sZ_{\min}\right)-\exp\left(-sZ_{\max}\right)\right]}{s}
\end{aligned}
\tag{A4.2a}
$$

である。ただし，$s \sim 0$ のときは

$$
N_{col} \approx N(0)\left(Z_{\max}-Z_{\min}\right) \tag{A4.2b}
$$

である。(A4.2a) または (A4.2b) により，$N(0)$ または N_{col} が与えられれば鉛直分布が決まる。(A4.1) は，

$$
N(z) = N_{col}\frac{s\exp\left(-sz\right)}{\exp\left(-sZ_{\min}\right)-\exp\left(-sZ_{\max}\right)} \tag{A4.3}
$$

となる。消散係数の高度分布は，

$$
\begin{aligned}
\beta_e(z) &= N(z)\sigma_e(z) \\
&= Q_e(z)\pi r_{sec}^2(z)N_{col}\frac{s\exp\left(-sz\right)}{\exp\left(-sZ_{\min}\right)-\exp\left(-sZ_{\max}\right)}
\end{aligned}
\tag{A4.4}
$$

ここで $Q_{\mathrm{e}}(z)$ は前節までに説明した方法で計算した混合媒体の吸湿状態での平均消散効率因子である。これは高度によって異なるが大気を層に切ったときその層の中では一定と仮定すると $Q_{\mathrm{e}}(j)$ と書ける。消散係数を鉛直積分した量，すなわち光学的厚さは，

$$
\begin{aligned}
\tau &= \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} \beta_e(z)dz \\
&= N_{col}\frac{s}{\exp\left(-sZ_{\min}\right)-\exp\left(-sZ_{\max}\right)}\int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} Q_e(z)\pi r_{sec}^2(z)\exp\left(-sz\right)dz \\
&= N_{col}\frac{s}{\exp\left(-sZ_{\min}\right)-\exp\left(-sZ_{\max}\right)}\sum_j\left[Q_e(j)\pi r_{sec}^2(j)\int_{z_{j-1}}^{z_j}\exp\left(-sz\right)dz\right] \\
&= N_{col}\frac{1}{\exp\left(-sZ_{\min}\right)-\exp\left(-sZ_{\max}\right)}\sum_j\left\{Q_e(j)\pi r_{sec}^2(j)\left[\exp\left(-sz_{j-1}\right)-\exp\left(-sz_j\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{A4.5}
$$

となる。この式から逆にτが与えられたときに N_{col} を計算することができる。また，(平均の)体積平均半径を使うと $N(z)$ から $V(z)$ を計算できるので，鉛直積算の体積密度 ($\mathrm{m}^3/\mathrm{m}^2$)は，

$$V_{col} = \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} V(z)dz = \int_{Z_{\min}}^{Z_{\max}} N(z)\frac{4}{3}\pi r_{vol}^3(z)dz$$
$$= N_{col}\frac{1}{\exp(-sZ_{\min}) - \exp(-sZ_{\max})}\sum_j \left\{\frac{4}{3}\pi r_{vol}^3(j)\left[\exp(-sz_{j-1}) - \exp(-sz_j)\right]\right\} \tag{A4.6}$$

となり，V_{col} が与えられたときに N_{col} を計算することができる。同様に鉛直積算の質量密度(kg/m^2)を M_{col} とし，これから N_{col} を計算することができる。また粒子の質量や体積は dry/wet どちらの状態でも定式化できる。結局，N_{col}, または dry/wet 状態のτ, V_{col}, M_{col} のいずれか一つが与えられれば，それ以外の全てを計算できる。

仮に，粒子の混合割合や相対湿度が高度によって変化しないなら，(A4.5–6)などはより簡略化した形に書ける。

$$\tau^{dry/wet} = N_{col}Q_e^{dry/wet}\pi\left(r_{sec}^{dry/wet}\right)^2 \tag{A4.7a}$$

$$V_{col}^{dry/wet} = N_{col}\frac{4\pi}{3}\left(r_{vol}^{dry/wet}\right)^3 \tag{A4.7b}$$

$$M_{col}^{dry/wet} = N_{col}\frac{4\pi}{3}\left(r_{vol}^{dry/wet}\right)^3\rho^{dry/wet} \tag{A4.7c}$$

ライダーなどの観測によれば消散係数の鉛直分布は大雑把には指数分布で，境界層でそれよりも幾分大きな消散係数が観測されることが多い。より複雑な扱いが必要なときにはいくつかの関数（例えばガンマ分布）の重ね合わせで表現することもできる。

A5 方向ベクトルによる光子の輸送の表現

光子の輸送方向は単位ベクトルの x, y, z 成分で表現すると効率的である。天頂角をθ, 方位角をϕとすると，方向ベクトルの成分は

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{A5.1}$$

となる。ここで，

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \tag{A5.2}$$

$$\sin\theta = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{1 - u_z^2} \tag{A5.3}$$

が成り立つ。

A5.1 光子の移動（輸送）

光子が $\mathbf{\Omega}$ 方向にパス長 l だけ輸送されるとき，光子の座標は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + l\mathbf{\Omega} \tag{A5.4}$$

と変化する。

A5.2 方向の回転（散乱）

散乱や反射によって光子の輸送方向が変化するとき, 方向ベクトルの回転として記述できる。今，方向ベクトル $\mathbf{\Omega}$ が天頂角の増加する方向に沿ってΘだけ回転し，さらにそこから元の $\mathbf{\Omega}$ 方向の周りに方位角Φだけ回転するとき，新しい方向は,

$$\mathbf{\Omega}' = \cos\Theta\mathbf{\Omega} + \sin\Theta\left[\cos\Phi\begin{pmatrix} u_x u_z/\sin\theta \\ u_y u_z/\sin\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + \sin\Phi\begin{pmatrix} -u_y/\sin\theta \\ u_x/\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{A5.5}$$

となる。ただし $\sin^2\theta = u_x^2 + u_y^2 = 1 - u_z^2 \approx 0$ のときは上の式では計算できない。この場合はよりシンプルに

$$\mathbf{\Omega}' = \mathrm{sign}(u_z)\begin{pmatrix} \sin\Theta\cos\Phi \\ \sin\Theta\sin\Phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{A5.6}$$

で計算できる。sign(.) は正か負かの符号をとる関数である。

A5.3 二つのベクトルの間の角度

二つの単位ベクトル$\mathbf{\Omega}_1$, $\mathbf{\Omega}_2$ の間の角度αを求める方法を考える。

$$\cos\alpha = \mathbf{\Omega}_1 \cdot \mathbf{\Omega}_2 \tag{A5.7}$$

であるので，通常はこれを解けばよい。しかし，難しいのはαがほぼ 0 または π のときである。$\cos\alpha$はほぼ 1 または –1 であり，上の式を単純に解いたのでは桁落ちが激しい。この問題は例えばレーザービームのシミュレーションなどで重要になる。αが小さいときにも高精度に求める方法を以下に述べる。

まず $\sin\alpha$を求めてその逆関数によってαを求めることにする。今，長さ 1 の二つのベクトル$\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{\Omega}_2$で囲まれた細長い三角形を考えると，もう一つの辺の長さ a は

$$a^2 = \left|\mathbf{\Omega}_1 - \mathbf{\Omega}_2\right|^2 \tag{A5.8}$$

より求まる。余弦定理より

$$a^2 + 1 - 2a\cos\beta = 1 \tag{A5.9}$$

$$\therefore \sin\beta = \sqrt{1 - a^2/4} \tag{A5.10}$$

これと正弦定理を用いると，

$$\sin\alpha = a\sin\beta = a\sqrt{1 - a^2/4} \tag{A5.11}$$

となる。次に

$$y = \sin\alpha - C = 0 \tag{A5.12}$$

と置くと，αが十分小さいとき，Newton 法の第一次近似より，

$$\alpha = C - \frac{y(\alpha = C)}{y'(\alpha = C)} = C - \frac{\sin C - C}{\cos C} \tag{A5.13}$$

となる。$\sin C, \cos C$ をテイラー展開して二次の項まで考慮して上式に代入すると，

$$\alpha = C\frac{6 - 2C^2}{6 - 3C^2} \tag{A5.14}$$

となる。これに $C = \sin\alpha$を代入すれば解が求まる。

A6 二次元平面上のランダムな方向の決定：極座標法

散乱や反射，あるいは正規分布に従うランダム変数の生成などにおいては，（回転天頂角Θの決定に使用される）一つの乱数と均一に分布する回転方位角Φのサインとコサインを求める必要がある。一見すると， [0,1) の範囲に均一に分布する乱数をρとして，

$$\Phi = 2\pi\rho_{\Phi} \tag{A6.1}$$

で計算すればよさそうである。しかし必要なのはΦではなくそのサイン・コサインであることが多い。その場合，より強力なのは以下のように $\rho, \cos\Phi, \sin\Phi$ を同時に決めてしまう方法である（極座標法：伏見，1989）。乱数ρ_1, ρ_2を発生させて

$$\begin{aligned} &W_1 = 1 - 2\rho_1, W_2 = 1 - 2\rho_2 \\ &r^2 = W_1^2 + W_2^2 \end{aligned} \tag{A6.2}$$

を計算し，

$$10^{-12} \le r^2 \le 1 \tag{A6.3}$$

となるまで繰り返す。この繰り返し計算は比較的速く収束する。なぜなら一回のサイクルで (A6.3) が成立する確率は$\pi/4 \sim 0.785$ だからである。結局，二次元平面上で原点を中心とする単位円内に均一に分布するランダムな点の座標が W_1, W_2 である。すると，

$$\begin{aligned} &\rho = r^2 \\ &\cos\Phi = W_1/r \\ &\sin\Phi = W_2/r \end{aligned} \tag{A6.4}$$

が成り立ち，サイン・コサインの計算が不要になる！

例として等方反射（Lambert 反射）の場合を考えよう。反射後の方位角ϕは均一に分布し，かつ $\cos^2\theta$が均一に分布することになるので，(A6.4) を使うと，

$$\begin{aligned} &\cos\theta = \sqrt{\rho} = r \\ &\cos\phi = W_1/r \\ &\sin\phi = W_2/r \end{aligned} \tag{A6.5}$$

となる。よって反射後の方向は，

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} W_1\sqrt{1-r^2}/r \\ W_2\sqrt{1-r^2}/r \\ r \end{pmatrix} \tag{A6.6}$$

である。

A7 数学関数

A7.1 $\cos^{-1}x$

今この関数の解は 0 から 2πの範囲とする。一般に $\cos^{-1}x$ の計算は非常に負荷が高いので $-0.99 < x < 0.99$ の時は LUT にしておくのがよい。x が 1 に近いときは以下のような近似計算が便利である。

今 x が小さい場合に $\cos\alpha = x$ を解くことを考える。

$$y = \cos\alpha - x \tag{A7.1}$$

と置くと，第一次近似解は

$$\alpha \approx \sqrt{2(1-x)} \tag{A7.2}$$

である。Newton 法を一段階だけ用いてテイラー展開を使うと，解は

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2(1-x)} - \frac{y\left(\alpha = \sqrt{2(1-x)}\right)}{y'\left(\alpha = \sqrt{2(1-x)}\right)} \\ &= \sqrt{2\delta}\,\frac{60 - 15\delta + 2\delta^2}{60 - 20\delta + 2\delta^2} \end{aligned} \tag{A7.3}$$

となる。ここで$\delta = 1 - x$ である。x が -1 に近いときは解は$\alpha = \pi - \cos^{-1}(-x)$ である。

A7.2 exp(−x)

この関数は透過率の計算などで頻繁に登場する。その場合 x は光学的厚さであり，通常 0 から $x_{\max} = 80$ の範囲にある。80 以上では透過率 $\exp(-x)$ はほぼ 0 と見なせる（単精度で)。この関数は $N = 10000$ 階調くらいの LUT にしておく。そして，

$$i = \mathrm{int}\left(\frac{N}{x_{\max}} x + 0.5\right) \tag{A7.4a}$$

$$\delta = x - \frac{x_{\max}}{N} i \tag{A7.4b}$$

を求める。テイラー展開を使うと，

$$\exp(-x) \approx \mathrm{LUT}(i)\left[1 - \delta(1 - \delta/2)\right] \tag{A7.5}$$

となる。$N = 10000$, $x_{\max} = 80$ の時，上の近似式の誤差は 0.00001%以下である。$x < 0.01$ の時はより単純に，

$$\exp(-x) \approx 1 - x(1 - x/2) \tag{A7.6}$$

で計算できる。

A7.3 1 – exp(–x)

この関数は衝突確率あるいは加熱率の計算などで必要になる。x が大きいとき (0.03 以上) には上述のように $\exp(-x)$ をまず求めて 1 から引けばよい。x が小さいときには桁落ちに注意しなければならない。そこでテイラー展開を使って，

$$1 - \exp(-x) \approx x\left[1 - x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6}\right)\right] \tag{A7.7}$$

により計算する。これの誤差は 0.0001%以下である。

A7.4 sin(x), cos(x)

三角関数は非常に負荷の高い関数である。今 x は 0 から 2πの範囲内であるとすると，$N = 10000$ 階調くらいの LUT にしておくのが良い。関数の値を求めるときには，まず

$$i = \mathrm{int}\left(\frac{N}{2\pi} x + 0.5\right) \tag{A7.8}$$

$$\delta = x - \frac{2\pi}{N} i \tag{A7.9}$$

を計算する。sin, cos それぞれの LUT を S, C として，テイラー展開を使うと，

$$\sin(x) \approx S(i) + \delta C(i) \tag{A7.10a}$$
$$\cos(x) \approx C(i) - \delta S(i) \tag{A7.10b}$$

によって内挿された値を得る。$N = 10000$ の時，上の近似式の誤差は 0.00001%以下である。

References

荒屋真二，2003: 明解 3 次元コンピュータグラフィックス. 共立出版，191 pp.

柴田清孝, 1999: 光の気象学, 朝倉書店, 182 pp.

谷口博，W-J. Yang, 工藤一彦，黒田明慈，持田明野，1994: パソコン活用のモンテカルロ法による放射伝熱解析. コロナ社，231 pp.

伏見正則, 1989: 乱数. UP応用数学選書12 (UP Applied Mathematics Series 12), 東京大学出版会, 164 pp.

彦坂幸毅, 2003; 光合成機能の評価２　クロロフィル蛍光, in 光と水と植物のかたち，村岡・可知編，文一総合出版, p. 319.

吉村晴佳, 2001: キサントフィル・サイクル色素とスペクトル変化，日本リモートセンシング学会誌，**21, 4,** 373–376.

Aida, M., 1977: Scattering of solar radiation as a function of cloud dimensions and orientation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer,* **17,** 303–310.

Allen, W. A., H. W. Gausman, A. J. Richardson, and J. R. Thomas, 1969:, Interaction of isotropic light with a compact plant leaf, *J. Opt. Soc. Am.,* **59(10),** 1376-1379.

d'Almeida, G. A., P. Koepke, and E. P. Shettle, 1991: *Atmospheric Aerosols. Global Climatology and Radiative Characteristics.* A. Deepak Publishing, 561 pp.

Antyufeev V. S., and A. Marshak, 1990: Monte Carlo method and transport equation in plant canopies, *Remote Sens. Environ.,* **31,** 183.4.23.2091.

Antyufeev, V. S., 1996: Solution of the generalized transport equation with a peak-shaped indicatrix by the Monte Carlo method. Russ. *J. Numer. Anal. Math. Modeling,* **11,** 113–137.

Barker, H. W., and J. A. Davies, 1992: Solar radiative fluxes for stochastic, scale-invariant broken cloud fields. *J. Atmos. Sci.,* **49,** 1115–1126.

Barker, H. W., J.-J. Morcrette, and G. D. Alexander 1998: Broadband solar fluxes and heating rates for atmospheres with 3D broken clouds. *Q. J. R. Meteorol. Soc.,* **124,** 1245–1271.

Barker, H. W., R. K. Goldstein, D. E. Stevens 2003: Monte Carlo simulation of solar reflectances for cloudy atmospheres. *J. Atmos. Sci.,* **60,** 1881–1894.

Bates, D. R., 1984: Rayleigh scattering by air. *Planet. Space Sci.,* **32,** 785–790.

Bodhaine, B. A., N. B. Wood, E. G. Dutton, J. R. Slusser, 1999: On Rayleigh Optical Depth Calculations. *J. Atmos. and Oceanic Tech.,* **16,** 1854-1861.

Bohren, C.F., and Huffman, D.R., 1983: *Absorption and Scattering by Small Particles,* J. Wiley & Sons, NY, 530 pp.

Booth, T. E. 1985: *A Sample Problem for Variance Reduction in MCNP.* Los Alamos National Laboratory report LA-10363-MS, 68 pp (available from Los Alamos National Laboratory Research Library).

Cahalan, R. F., W. Ridgway, and W. J. Wiscombe, 1994a: Independent pixel and Monte Carlo estimates of the stratocumulus albedo. *J. Atmos. Sci.,* **51,** 3776–3790.

Cahalan, R. F., W. Ridgway, W. J. Wiscombe, T. L. Bell, and J. B. Snider, 1994b: The albedo of fractal stratocumulus clouds. *J. Atmos. Sci.,* **51,** 2434–2455.

Cahalan, R. F., et al., 2005: The International Intercomparison of 3D Radiation Codes (I3RC): Bringing together the most advanced radiative transfer tools for cloudy atmospheres, *Bull. Am. Meteorol. Soc.,* **86,** 1275–1293.

Chou, M-D., and K-T. Lee, 1996: Parameterizations for the absorption of solar radiation by water vapor and ozone. *J. Atmos. Sci,* **53,** 1203–1208.

Cox, C., and W. Munk, 1954: Measurements of the roughness of the sea surface from photographs of the Sun's glitter, *J. Opt. Society Am.,* **44,** 838-850.

Davies, R., 1984: Reflected solar radiances from broken cloud scenes and the interpretation of scanner measurements. *J. Geophys. Res.,* **89,** 1259–1266.

Dawson, T. P., P. J. Curran, and S. E. Plummer, 1988: LIBERTY-Modeling the effects of leaf biochemical concentration on reflectance spectra, *Remote. Sens. Environ.,* **65,** 50–60.

de Pury, D., and G., Farquhar, 1997:Simple scaling of photosynthesis from leaves to canopies without the errors of big-leaf models, *Plant Cell Environment*, **20,** 537–557.

Downing, H. D., and D. Williams, 1975: Optical constants of water in the infrared. *J. Geophys. Res.,* **80,** 1656–1661.

Edlén, B. 1953: The dispersion of standard air. *J. Opt. Soc. Amer.,* **43,** 339–344.

Evans, K. F. 1998: The spherical harmonics discrete ordinate method for three-dimensional atmospheric radiative transfer. *J. Atmos. Sci.,* **55,** 429–446.

Evans, K. F., and A. Marshak, 2005: Numerical Methods. *3D Radiative Transfer for Cloudy*

Atmospheres, A. B. Davis and A. Marshak, Ed., Springer-Verlag., 243–281.

Farquhar, G., D., S. von Caemmerer, and J. A. Berry, 1980: A biochemical model of photosynthetic CO2 assimilation in leaves of C3 species, *Planta*, **149,** 78–90.

Fu Q., and K-N. Liou, 1992: On the correlated k-distribution method for radiative transfer in nonhomogeneous atmospheres. *J. Atmos. Sci.,* **49,** 2130–2156.

Fu, Q., 1996: An accurate parameterization of the solar radiative properties of cirrus clouds for climate models. *J. Climate,* **9,** 2058–2082.

Fu, Q., M. C. Caribb, H. W. Barker, S. K. Krueger, and A. Grossman 2000: Cloud geometry effects on atmospheric solar absorption. *J. Atmos. Sci.,* **57,** 1156–1168.

Gastellu-Etchegorry, J.-P., V. Demarez, V. Pinel, and F. Zagolski, 1996; Modeling Radiative Transfer in Heterogeneous 3-D Vegetation Canopies, *Remote Sensing of Environment*, **58,** 131–156.

Gausman, H. W., W. A. Allen, and D. E. Ecobar, 1974: Refractive index of plant cell walls, *App. Opt.,* **13(1),** 109–111.

Govaerts, Y., and M. M. Verstraete, 1998: Raytran: a Monte Carlo ray tracing model to compute light scattering in three-dimensional heterogeneous media, *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing*, **36,** 493-505.

Hale, G. M., and M. R. Querry, 1973: Optical constants of water in the 200-nm to 200 μm wavelength region, *Appl. Optics*, **12**, 555–563.

Hansen, J. E., and L. D. Travis, 1974: Light scattering in planetary atmosphere. *Space Sci. Rev.,* **16,** 527–610.

Hayasaka, T., M. Kuji, and M. Tanaka, 1994: Air truth validation of cloud albedo estimated from NOAA advanced very high resolution radiometer data. *J. Geophys. Res.,* **99,** 18685–18693.

Hess, M., P. Koepke, and I. Schult, 1998: Optical properties of aerosols and clouds: The software package OPAC. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.,* **79,** 831–844.

Heymsfield, A. J., and C. M. R. Platte, 1984: A parameterization of the particle size spectrum of ice clouds in terms of the ambient temperature and the ice water content. *J. Atmos. Sci.,* **41,** 846–855.

Higurashi, A., and T. Nakajima, 1999: Development of a two-channel aerosol retrieval algorithm on a global scale using NOAA AVHRR. *J. Atomos. Sci.,* **56,** 924–941.

Ishida, H., 2006: Personal communications.

Iwabuchi, H., and T. Hayasaka, 2002: Effects of cloud horizontal inhomogeneity on the optical

thickness retrieved from moderate-resolution satellite data. *Journal of the Atmospheric Sciences,* **59,** 2227–2242.

Iwabuchi, H., and T. Hayasaka 2003: A multi-spectral non-local method for retrieval of boundary layer cloud properties from optical remote sensing data. *Remote Sens. Environ.,* **88,** 294–308.

Iwabuchi, H., and K. Tsuboki, 2004: Camera visualization of cloud fields simulated by non-hydrostatic atmospheric models. *Journal of Visualization (Frontispiece),* **7,** 272.

Iwabuchi, H., 2006: Efficient Monte Carlo methods for radiative transfer modeling. *Journal of the Atmospheric Sciences,* **63,** 2324–2339.

Jacquemoud, S., and F. Baret, 1990: PROSPECT: A model of leaf optical properties spectra, *Remote Sens. Environ.,* **34,** 75–91.

Kato, S., T. P. Ackerman, J. H. Mather, and E. E. Clothiaux, 1999: The k-distribution method and correlated-k approximation for a shortwave radiative transfer model. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer,* **62,** 109–121.

Kawrakow, I., and D. W. O. Rogers 2001: *The EGSnrc Code System: Monte Carlo Simulation of Electron and Photon Transport,* NRCC Report PIRS-701, 287 pp (revised in 2003).

Kneizys, F. X., E. P. Shettle, L. W. Abreu, J. H. Chetwynd, G. P. Anderson, W. O. Gallery, J. E. A. Selby, and S. A. Clough, 1988: *Users Guide to LOWTRAN 7.* AFGL-TR-88-0177, 137 pp.

Liou, K. N., 1992: *Radiation and Cloud Processes in the Atmosphere. Oxford University Press,* 473 pp.

Liou 2002: *An Introduction to Atmospheric Radiation. Second Edition.* Academic Press, New York, 583 pp.

List, R. J., 1968: *Smithsonian Meteorological Tables.* Smithsonian, 527 pp.

Lucht W., C. B. Schaaf, A. H. Strahler, 2000: An algorithm for the retrieval of albedo from space using semiempirical BRDF models. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **38**, 977–998.

Lyapustin, A., 2002: Radiative transfer code SHARM-3D for radiance simulations over a non-Lambertian nonhomogeneous surface: intercomparison study, *Appl. Optics*, **41**, 5607–5615.

Macke, A., D. L. Mitchell, and L. V. Bremen 1999: Monte Carlo radiative transfer calculations for inhomogeneous mixed phase clouds. *Phys. Chem. Earth (B)*, **24,** 237–241.

Marchuk, G., G. Mikhailov, M. Nazaraliev, R. Darbinjan, B. Kargin, and B. Elepov 1980: *The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics.* Springer-Verlag, 208 pp.

Marshak, A., and A. B. Davis (Eds), 2005: *Three-Dimensional Radiative Transfer in Cloudy Atmospheres*. Springer, 686 pp.

Martin, G. M., D. W. Johnson, and A. Spice, 1994: The measurement and parameterization of effective radius of droplets in warm stratocumulus clouds. *J. Atmos. Sci.,* **51,** 1823–1842.

McKee, T. B., and S. K. Cox, 1974: Scattering of visible radiation by finite clouds. *J. Atmos. Sci.,* **31,** 1885–1892.

Modest, M. F. 2003: *Radiative Heat Transfer. Second Edition*. Academic Press, New York, 822 pp.

Nakajima, T., and M. Tanaka, 1983: Effect of wind-generated waves on the transfer of solar radiation in the atmosphere-ocean system, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer,* **29**, 521-537.

Nakajima, T., and M. Tanaka 1988: Algorithms for radiative intensity calculations in moderately thick atmospheres using a truncation approximation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer,* **40,** 51–69.

Nakajima, T., and M. D. King, 1990: Determination of the optical thickness and effective particle radius of clouds from reflected solar radiation measurement. Part I: Theory. *J. Atmos. Sci.,* **47,** 1878–1893.

Nakajima, T., M. Tsukamoto, Y. Tsushima, A. Numaguti, and T. Kimura, 2000: Modeling of the radiative process in an atmospheric general circulation model. *Appl. Opt.,* **39,** 4869–4878.

North, P. R.. 1996: Three-dimensional forest light interaction model using a Monte Carlo method, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **34(4),** 946–956.

Oikawa, T., and T. Saeki, 1977: Light regime in relation to plant population geometry. I. A Monte Carlo simulation of light microclimate within a random distribution foliage, *Bot. Mag. Tokyo*, **90,** 1–10.

O'Hirok, W., and C. Gautier 1998: A three-dimensional radiative transfer model to investigate the solar radiation within a cloudy atmosphere. Part I: Spatial effects. *J. Atmos. Sci.,* **55,** 2162–2179.

Pacheco, P. S, 1997: *Parallel Programming with MPI*. Morgan Kaufmann Publishers.

Palmer, K. P., and D. Williams, 1974: Optical properties of water in the near infrared. *J. Opt. Soc. Am.,* **64,** 1107–1110.

Peck. E. R., and K. Reeder, 1972: Dispersion of air. *J. Opt. Soc. Amer.,* **62,** 958–952.

Penndorf, R., 1957: Tables of the refractive index for standard air and the Rayleigh scattering coefficient for the spectral region between 0.2 and 20.0 μm and their application to

atmospheric optics. *J. Opt. Soc. Amer.,* **47,** 176–182.

Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, 1992: *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing. Second Edition.* Cambridge University Press, 933 pp.

Rahman, H., B. Pinty, and M. M. Verstraete, 1993: Coupled surface-atmosphere reflectance (CSAR) model. 2. Semiempirical surface model usable with NOAA advanced very high resolution radiometer data, *J. Geophys. Res.*, **98**, 20,791–20,801.

Ross, J. K., and A. L. Marshak, 1988: Calculation of canopy bidirectional reflectance using the Monte Carlo method, Remote Sensing of Environment, 24, 213-225.

Shettle, E. P., and R. W. Fenn, 1979: *Models for the Aerosols of the Lower Atmosphere and the Effects of Humidity Variations on Their Optical Properties.* AFGL-TR-79-0214.

Shultis, J. K.and R. Myneni, 1988: Radiative transfer in vegetation canopies with anisotropic scattering, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **39,** 115–129.

Stern , F., 1964: Transmission of isotropic radiation across an interface between two dielectrics, *Appl. Opt.,* **3(1),** 111–113.

Tang, I. N., and H. R. Munkelwitz, 1994: Water activities, densities, and refractive indices of aqueous sulfates and sodium nitrate droplets of atmospheric importance. *J. Geophys. Res.,* **99,** 18801–18808.

Tang, I. N., and H. R. Munkelwitz, 1996: Chemical and size effects of hygroscopic aerosols on light scattering coefficients. *J. Geophys. Res.,* **101,** 19245–19250.

Thomas, G. E., and K. Stamnes 1999: *Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 517 pp.

Városi, F., and E. Dwek, 1999: Analytical approximations for calculating the escape and absorption of radiation in clumpy dusty atmosphere. *The Astrophys. J.,* **523,** 265–305.

Wagner, T., J. P. Burrows, T. Deutschmann, B. Dix, C. von Friedeburg, U. Frieß, F. Hendrick, K.-P. Heue, H. Irie, H. Iwabuchi, Y. Kanaya, J. Keller, C. A. McLinden, H. Oetjen, E. Palazzi, A. Petritoli, U. Platt, O. Postylyakov, J. Pukite, A. Richter, M. van Roozendael, A. Rozanov, V. Rozanov, R. Sinreich, S. Sanghavi, F. Wittrock, 2006: Comparison of box-air-mass-factors and radiances for multiple-axis differential optical absorption spectroscopy (MAX-DOAS) geometries calculated from different UV/visible radiative transfer models. *Atmos. Chem. Phys.* (submitted).

X-5 Monte Carlo Team, 2003 (Revised 6/30/2004): *MCNP – A General Monte Carlo N-Particle Transport Code, Version 5. Volume I: Overview and Theory.* Los Alamos National Laboratory report LA-UR-03-1987, (available from Los Alamos National Laboratory Research Library).

Young, A. T., 1981: On the Rayleigh-scattering optical depth of the atmosphere. *J. Appl. Meteor.,* **20,** 328–330.